алгебраическая геометрия
программа экзамена

Ю. Г. ПРОХОРОВ

2. Алгебраические кривые

Если не оговаривается противное, то кривая подразумевается неприводимой, проективной и неособой, определенной над алгебраически замкнутым полем.

Задачи.

(1) Пусть $C \subset \mathbb{P}^2$ – приведенная, но не обязательно неприводимая кубическая кривая. Показать существование группового закона на C.
(2) Докажите, что кривая рода $g \geq 2$ имеет лишь конечную группу автоморфизмов.
(3) Используя формулу Гурвица оценить порядок конечной группы автоморфизмов кривой рода $g \geq 2$ (см. [2, 2.5, с. 387]).
(4) Может ли группа автоморфизмов кривой рода $g = 10$ быть изоморфной $\mathfrak{S}_6$?
(5) Пусть X – кривая рода 3 с группой автоморфизмов порядка 168. Докажите, что эта группа – простая.
(6) Рассмотрим кривую $x^2y^{n-2} + y^n + z^n$ на $\mathbb{P}^2$. Вычислите ее (геометрический) род.
(7) Покажите, что группа автоморфизмов общей кривой рода $g = 2, 3, 4, 5$ тривиальна.
(8) Может ли кривая рода 3 иметь автоморфизм порядка 5?
(9) Докажите, что любая кривая рода 2 – гиперэллиптическая. Вычислите размерность многообразия модулей. Докажите, что кривая рода 3 или является гиперэллиптической, или изоморфна плоской квартике. Вычислите размерность многообразия модулей.
(10) Докажите, что существуют негиперэллиптические кривые любого рода $g \geq 3$.
(11) Может ли кривая иметь два различных линейных ряда g^1_2?

Москва – 1999.

(12) Кривая называется *тригональной*, если на ней существует одномерная линейная система степени 3 без базисных точек. Может ли кривая быть одновременно гиперэллиптической и тригональной?

(13) Докажите, что существуют тригональные кривые любого рода.

(14) Какими свойствами удовлетворяет каноническая модель тригональной кривой?

(15) Пусть $X \subset \mathbb{P}^3$ – неособая кривая рода 3 и степени 5. Докажите, что она является гиперэллиптической тогда и только тогда, когда она имеет 5-секущую.

(16) Используя формулу Гурвица, найти возможные порядки конечных подгрупп в $PGL_2(\mathbb{C})$.

(17) Докажите, что каждая кривая рода 1 изоморфна плоской кубической кривой.

(18) Классифицируйте эллиптические кривые (E, o) с нетривиальной группой автоморфизмов. Приведите также примеры абелевых поверхностей с нетривиальной группой автоморфизмов.

(19) Приведите примеры (с доказательством) двумерных комплексных торов, не являющихся абелевыми многообразими.

(20) Докажите, что на кривой X рода $g \geq 2$ линейная система $|K_X|$ не имеет базисных точек.

(21) (см. 5.3-5.4, стр. 439 [2]) Покажите, что гиперэллиптические кривые рода 4 образуют неприводимое семейство размерности 7, а негиперэллиптические – неприводимое семейство размерности 9. Среди них кривые, обладающие единственным линейным рядом g^1_3, составляют неприводимое семейство размерности 8.

(22) (см. 5.5, стр. 439 [2])

   (a) Покажите, что кривые рода 5, каноническая модель которых в $\mathbb{P}^4$ является полным пересечением трех квадрик, образуют семейство размерности 12.

   (b) Покажите, что X тогда и только тогда имеет линейный ряд g^1_3, когда она может быть представлена в виде плоской квинтики с обыкновенной двойной точкой. Такие кривые образуют неприводимое семейство размерности 11.

   (c) В случае (b) коники в $\mathbb{P}^2$, проходящие через особую точку X, высекают на X каноническую линейную систему (не имеющую базисных точек вне особой точки). Отображая $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^4$ с помощью этой линейной системы, показать, что каноническая кривая лежит на кубической поверхности $V \subset \mathbb{P}^4$, где V изоморфна раздутию $\mathbb{P}^2$ в одной точке. Более того, V является объединением всех 3-секущих кривой X, соответствующим дивизорам из g_3^1, так что V содержится в пересечении всех квадрик в $\mathbb{P}^4$, проходящих через X. Таким образом, поверхность V и ряд g_3^1 на X однозначно определены.

(d) Если кривая X не имеет g_3^1, то она является полным пересечением трех квадрик.

(23) Пусть $C \subset \mathbb{P}^5$ – общая каноническая кривая рода 6. Докажите, что она содержится в единственной поверхности дель Пеццо степени 5.

(24) Пусть C – кривая рода 2, $J = J(C)$ – ее якобиан и Θ – тэта-дивизор на J. Покажите, что линейная система $|2\Theta|$ задает двулистный морфизм на поверхность $S \subset \mathbb{P}^3$ степени 4, являющийся фактором по инволюции.

(25) Проиллюстрировать теорему Римана-Кэмпфа об особенностях на примере линейной системы $|D|$ степени 5 и размерности 2 на кривой рода 6. В частности, как устроен касательный конус к многообразию $\mu(X^{(5)}) \subset J(X)$ в точке $\mu(D)$?

(26) Используя строение топологической фундаментальной группы алгебраических кривых над $\mathbb{C}$, показать, что любое конечно порожденное над $\mathbb{C}$ поле степени трансцендентности 1 имеет конечное нормальное расширение с любой наперед заданной конечной группой Галуа (функциональный аналог обратной задачи Галуа).

Список литературы

[1] Шафаревич И.Р. *Основы алгебраической геометрии,* Т. **1-2**, М. Наука (1988)

[2] Хартсхорн Р. *Алгебраическая геометрия,* М. Мир (1981)

[3] Гриффитс Ф., Харрис Дж. *Принципы алгебрачеcкой геометрии,* Т. **1-2**, М. Мир (1982)

[4] Шокуров В. В. *Римановы поверхности и алгебраические кривые,* Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направл. **23** (1988) 5–171

[5] Шокуров В. В. *Алгебраические кривые и их якобианы,* Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направл. **36** (1989) 233–273