Многообразия Фано

Ю. Г. Прохоров

2010/2011 учебный год, осень[1]

1 Необходимые сведения

Теорема (Асимптотическая теорема Римана-Роха). *Пусть L – дивизор на неособом проективном многообразии X. Тогда*

$$\chi(tL) = \frac{1}{n!}L^n t^n + \frac{1}{2(n-1)!}(-K_X) \cdot L^{n-1}t^{n-1} + \cdots$$

Теорема (лемма Кодаиры). *Пусть D – объемный дивизор Картье на нормальном проективном многообразии X. Для любого дивизора Картье E имеем $|nD - E| \neq \emptyset$ при $n \gg 0$.*

Доказательство. Можно считать, что X неособо. Далее заменяя D и A на их кратности, можно считать, что D и A – целые

[1] 25.11.2010

дивизоры Картье. Поскольку любой дивизор Картье на проективном многообразии представляется в виде разности двух очень обильных дивизоров, достаточно доказать наше утверждение в случае, когда A очень обилен. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_X(mm_0D - A) \longrightarrow \mathscr{O}_X(mm_0D) \longrightarrow \mathscr{O}_A(mm_0D) \longrightarrow 0.$$

Если $H^0(X, \mathscr{O}_X(mm_0D - A)) = 0$, то мы имеем вложение

$$H^0(X, \mathscr{O}_X(mm_0D)) \hookrightarrow H^0(A, \mathscr{O}_A(mm_0D)).$$

Таким образом,

$$h^0(A, \mathscr{O}_A(mm_0D)) \geq h^0(X, \mathscr{O}_X(mm_0D)) \geq \alpha m^d.$$

Противоречие с тем, что $\dim A < d$. □

Следствие. *Дивизор Картье D на нормальном проективном многообразии X является объемным $\iff D = A + E$, где A обилен, а E эффективен.*

Следствие. *Пусть D – численно эффективный объемный дивизор Картье D на нормальном проективном многообразии X. Существует эффективный $\mathbb{Q}$-дивизор E такой, что $D - \epsilon E$ обилен для $0 < \epsilon \ll 1$.*

Лемма. *Пусть X – нормальная алгебраическая поверхность, пусть $f\colon \tilde{X} \to X$ – ее разрешение и пусть $\sum E_i$ – ее исключительный дивизор. Тогда матрица $\|E_i \cdot E_j\|$ отрицательно определена.*

Доказательство. Пусть H – обильный дивизор на X. Достаточно доказать, что $D^2 < 0$ для любого дивизора $D = \sum d_i E_i \neq 0$. Предположим противное: $D^2 \geq 0$. Во-первых рассмотрим случай $D \gneqq 0$. Так как $(f^*H)^2 > 0$ и $D \cdot f^*H = 0$, то по теореме Ходжа об индексе имеем $D \equiv 0$, что невозможно: D имеет строго положительное пересечение с обильными дивизорами. Если же $D = D_+ - D_-$, где D_+ и D_- – эффективные дивизоры без общих компонент, то из доказанного выше имеем

$$D^2 = D_+^2 + D_-^2 - 2D_+ \cdot D_- \leq D_+^2 + D_-^2 < 0.$$

Противоречие. □

Лемма. *Пусть M и $F = \sum \alpha_i F_i$ – дивизоры без общих компонент на нормальной поверхности Y такие, что $M \geq 0$, матрица пересечений $\|F_i \cdot F_j\|$ отрицательно определена и $(M + F) \cdot F_i \leq 0$ (соответственно $(M + F) \cdot F_i < 0$) для всех i. Тогда $F \geq 0$ (соответственно $\alpha_i > 0$ для всех i).*

Доказательство. Запишем $F = F_+ - F_-$, где F_+ и F_- – эффективные дивизоры без общих компонент. Предположим, что $F_- \neq 0$. Тогда $(F_-)^2 < 0$. Следовательно, $F_- \cdot F_i < 0$ для некоторой компоненты $F_i \subset \operatorname{Supp} F_-$. Отсюда

$$0 \geq F_i \cdot (M + F) = F_i \cdot M + F_i \cdot F_+ - F_i \cdot F_- > 0.$$

Противоречие. Если же $\alpha_i = 0$ для некоторого i, то $F_i \cdot (M + F) \geq 0$. Это доказывает утверждение. □

Следствие. *Пусть* $g\colon Y \to X$ *– бирациональный проективный морфизм нормальных многообразий, пусть* $E = \sum E_i$ *– исключительный дивизор и пусть* L *– дивизор на* Y *такой, что* $g_*L \geq 0$ *и* $-L$ *является* g*-численно эффективным. Тогда* $L \geq 0$*. Более того, если* L *не является* g*-численно тривиальным на некоторой исключительной компоненте* E_i*, то коэффициент в* L *каждого простого дивизора* E_j *такого, что* $g(E_j) = g(E_i)$ *строго положителен. В частности, если дивизор* $-L$ g*-обилен, то* $L - \epsilon E \geq 0$ *для некоторого* $\epsilon > 0$ *и* g*-исключительное множество имеет чистую коразмерность* 1*.*

Доказательство. Если X и Y – поверхности, то утверждение непосредственно следует из леммы 8. Общий случай гиперплоскими сечениями сводится к случаю поверхностей. □

Следствие. *Пусть* $g\colon Y \to X$ *– бирациональный морфизм проективных нормальных многообразий, пусть* $E = \sum E_i$ *– исключительный дивизор и пусть* L *– эффективный дивизор на* Y *такой, что* $L \equiv \sum a_i E_i$*. Тогда* $L = \sum a_i E_i$*.*

Пусть X – нормальное проективное многообразие. В пространстве $\mathrm{N}_1(X)$ рассмотрим выпуклый конус $\mathrm{NE}(X)$, порожденный всеми эффективными 1-циклами. Обозначим через $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ его замыкание. Таким образом, $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ – замкнутый выпуклый конус в конечномерном вещественном пространстве

$\mathrm{N}_1(X)$. Он называется *конусом Мори*. Более того, $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ порождает $\mathrm{N}_1(X)$. Отметим однако, что элементы $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ необязательно представляются эффективными 1-циклами и необязательно имеют рациональные коэффициенты. Каждый дивизор $\mathbb{Q}$-Картье определяет линейную функцию на $\mathrm{N}_1(X)$.

Теорема (критерий обильности Клеймана). *Дивизор Картье H обилен тогда и только тогда, когда он определяет строго положительную функцию на $\overline{\mathrm{NE}}(X) \setminus \{0\}$.*

Доказательство. Пусть H обилен. Очевидно, что H неотрицателен на $\overline{\mathrm{NE}}(X)$. Предположим, что $H \cdot z = 0$ для некоторого $z \in \overline{\mathrm{NE}}(X) \setminus \{0\}$. Так как $z \neq 0$, то существует дивизор Картье L такой, что $L \cdot z < 0$. Но тогда для $n \gg 0$ дивизор $L + nH$ обилен. Таким образом, $0 \leq (L + nH) \cdot z = L \cdot z < 0$. Противоречие.

Обратная импликация будет доказана только в размерности 2. Мы выведем ее из критерия обильности Накаи-Мойшезона. Предположим, что дивизор H строго положителен на $\overline{\mathrm{NE}}(X) \setminus \{0\}$ и не является обильным. Тогда $H^2 \leq 0$. Пусть A – любой обильный дивизор. Рассмотрим множество

$$\mathcal{M} := \{t \in \mathbb{Q} \mid H + tA \text{ обилен}\}.$$

Ясно, что это множество содержит все $t \gg 0$. Пусть $\alpha := \inf \mathcal{M}$. По нашему предположению $\alpha \geq 0$. Тогда $[H + \alpha A] \in \overline{\mathrm{NE}}(X)$.

Поэтому $H \cdot (H + \alpha A) > 0$. Следовательно, $(H+\alpha A)^2 > 0$ и $\alpha > 0$. Согласно критерию обильности Накаи-Мойшезона дивизор $H + (\alpha - \varepsilon)A$ обилен при $0 < \varepsilon \ll 1$. Это противоречит выбору α. $\square$

Теорема **(теорема о конусе, С. Мори 1982).** *Пусть X – неособое проективное многообразие и пусть H – обильный дивизор на X. Для любого $\varepsilon > 0$ существует не более конечного числа экстремальных лучей $R_i \subset \overline{\mathrm{NE}}(X)$ таких, что $(K_X + \varepsilon H) \cdot R_i < 0$. Каждый луч R_i порождается классом неприводимой рациональной кривой C_i такой, что $0 < -K_X \cdot C_i \leq \dim X + 1$. Конус $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ порождается конусом $\overline{\mathrm{NE}}(X) \cap \{z \mid (K_X + \varepsilon H) \cdot z \geq 0\}$ и лучами R_i.*

Теорема **(теорема о стягивании, Мори - Кавамата - Шокуров).** *Пусть X – неособое проективное многообразие и пусть $R \subset \overline{\mathrm{NE}}(X)$ – K_X-отрицательный экстремальный луч. Тогда существует сюръективный проективный морфизм $\varphi : X \to Z$ на неособое проективное многообразие Z такой, что $\varphi_* \mathscr{O}_X = \mathscr{O}_Z$ и $\varphi(C)$ – точка для кривой $C \iff [C] \in R$.*

Следствие. *Имеет место*

$$0 \longrightarrow \operatorname{Pic} Z \xrightarrow{\varphi^*} \operatorname{Pic} X \xrightarrow{\cdot C} \mathbb{Z}$$

где $[C] \in R$. В частности, $\operatorname{Pic} X \simeq \operatorname{Pic} Z \oplus \mathbb{Z}$.

2 Определения и простейшие свойства

Всюду предполагается, что основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто и $\operatorname{char} \Bbbk = 0$ (или $\Bbbk = \mathbb{C}$).

Определение. Неособое проективное многообразие X называется *многообразием Фано*, если его антиканонический дивизор $-K_X$ обилен.

Теорема. *Пусть X – многообразие Фано. Тогда*

- $P_m := \dim H^0(X, -mK_X) = 0$*;*
- $\kappa(X) = -\infty$*;*
- $H^i(X, mK_K) = 0,\ m \leq 0,\ i > 0$*;*
- $H^i(X, mK_K) = 0,\ m \geq 1,\ i < \dim X$*;*
- $H^i(X, \mathscr{O}_X) = 0,\ i > 0$*;*
- $H^1(X, \mathbb{Z}) = 0$*;*
- $\operatorname{Pic}(X) \simeq H^2(X, \mathbb{Z})$ *– конечнопорожденная группа без кручения;*
- $H_1(X, \mathbb{Z}) = 0$*.*

Доказательство. Докажем предпоследнее утверждение. Из последовательности

$$0 \to \mathbb{Z} \longrightarrow \mathscr{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathscr{O}_X^* \to 0$$

получаем изоморфизм $\mathrm{Pic}(X) \simeq H^2(X, \mathbb{Z})$. Предположим, что $D \in \mathrm{Pic}(X)$ – элемент кручения. Тогда $\chi(X, D) = h^0(X, D) = 0$. С другой стороны, по теореме Римана-Роха $\chi(X, D) = \chi(\mathscr{O}_X) = 1$. Последнее следует из формулы универсальных коэффициентов

$$H^2(X, \mathbb{Z}) \simeq \text{своб. часть } H_2(X, \mathbb{Z}) \oplus \text{круч. } H_1(X, \mathbb{Z}).$$

$\square$

Наибольшее целое число r такое, что $-K_X = rH$ для некоторого обильного дивизора H называется *индексом Фано* многообразия Фано X.

Следствие. $\dim X = 2 \Longrightarrow K_X^2 + \rho(X) = 10$. *В частности,* $1 \leq K_X^2 \leq 9$.

Теорема. *Пусть* X *– многообразие Фано и пусть* r *– его индекс Фано. Тогда* $r \leq \dim X + 1$.

Доказательство. Пусть $n := \dim X$ и $r > n + 1$. Запишем $-K_X = rH$. По теореме Римана-Роха $\chi(t) := \chi(tH)$ – многочлен степени n. С другой стороны, $\chi(t) = h^0(X, tH)$ если дивизор $-K_X + tH$ обилен, т.е. при $t > -r$. Таким образом, $\chi(t)$ имеет корни в $t = -1, \ldots, -(n+1)$. $\square$

3 Примеры

- Проективные пространства $\mathbb{P}^n$.

- Неособая проективная кривая X – многообразие Фано $\iff$ $g(X) = 0 \iff X \simeq \mathbb{P}^1$.

- Двумерные многообразия Фано называются *поверхностями дель Пеццо*.

- Неособая гиперповерхность $X_d \subset \mathbb{P}^n$ – многообразие Фано $\iff d < n + 1$.

- *Полное пересечение* $X_{d_1 \cdots d_r} \subset \mathbb{P}^n$ гиперповерхностей степеней $d_1, \ldots, d_r$ – многообразие Фано $\iff \sum d_i < n + 1$.

- *Произведения.* $X \times Y$ – многообразие Фано $\iff$ X и Y– многообразия Фано.

- Пусть X – многообразие Фано индекса $r > 1$. Предположим, что существует неособый элемент $D \in |kH|$, $k < r$. Тогда D – также многообразие Фано.

- Пусть X – многообразие Фано и пусть $f : X \to Z$ – сюръективный морфизм со связными слоями. Тогда общий слой – также многообразие Фано.

- Пусть X – многообразие Фано и пусть $f : X \to Y$ – бирациональный морфизм такой, что $\dim f(\mathrm{Exc}(f)) = 0$. Тогда Y – также многообразие Фано.

Лемма. *Пусть $f : X \to Y$ – бирациональный морфизм неособых многообразий. Запишем*

$$K_Y = f^* K_X + \sum a_i E_i$$

где E_i – (все) неприводимые исключительные дивизоры. Тогда $a_i > 0$ $\forall i$.

Доказательство. Выберем точку $P \in X$ и локальные координаты $x_1, \ldots, x_n$ в окрестности $P \in U \subset X$. Пусть $Q := f(P)$ и пусть $y_1, \ldots, y_n$ – локальные координаты в окрестности $Q \in Y$. Отображение f задается функциями $y_i = y_i(x_1, \ldots, x_n)$. Пусть $\omega = \phi \, \mathrm{d}\, y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\, y_n$ – мероморфная дифференциальная форма старшей степени. Тогда $K_Y|_V = (\phi)$ и

$$f^* K_Y|_U = (\phi(y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_n(x_1, \ldots, x_n))).$$

С другой стороны, $K_X|_U$ может быть задан дивизором мероморфной формы $f^*\omega$, которая равна

$$\phi(y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_n(x_1, \ldots, x_n)) \det(\partial y_i / \partial x_j) \, \mathrm{d}\, y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\, y_n$$

Сравнивая эти выражения, получим, что $K_Y - f^* K_X$ задается обращением в нуль якобиана $\det(\partial y_i / \partial x_j)$, который является голоморфной функцией, обращающейся в нуль вдоль исключительных дивизоров. $\square$

• *Конечные морфизмы* Пусть $f : X \to Y$ – конечный сюръективный морфизм. Выберем точку $P \in X$ и локальные координаты $x_1, \dots, x_n$ в окрестности $P \in U \subset X$. Пусть $Q := f(P)$ и пусть $y_1, \dots, y_n$ – локальные координаты в окрестности $Q \in Y$. Отображение f задается функциями $y_i = y_i(x_1, \dots, x_n)$. Пусть $\omega = \phi \, \mathrm{d}\, y_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}\, y_n$ – мероморфная дифференциальная форма старшей степени. Тогда $K_Y|_V = (\phi)$ и

$$f^* K_Y|_U = (\phi(y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_n(x_1, \dots, x_n))).$$

С другой стороны, $K_X|_U$ может быть задан дивизором мероморфной формы $f^*\omega$, которая равна

$$\phi(y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_n(x_1, \dots, x_n)) \det(\partial y_i / \partial x_j) \, \mathrm{d}\, y_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}\, y_n$$

Сравнивая эти выражения, получим, что $K_Y - f^* K_X$ задается обращением в нуль якобиана $\det(\partial y_i / \partial x_j)$, который является голоморфной функцией, обращающейся в нуль вдоль дивизора – дивизора ветвления. Получаем формулу Гурвица

$$K_X = f^* K_Y + R, \qquad R \geq 0.$$

Предположим теперь, что f – циклическое накрытие степени m. Выбирая координаты $x_1, \dots, x_{n-1}$ вдоль компоненты R и x_n – трансверсально, мы можем считать, что $y_1 = x_1, \dots,$ $y_{n-1} = x_{n-1}$, $y_n = x_n^m$. Тогда $R = \frac{m-1}{m} f^* B$, где $B = f(R)_{\mathrm{red}}$. Таким образом,

$$K_X = f^* \left(K_Y + \frac{m-1}{m} B \right).$$

Поэтому X – многообразие Фано $\iff$ дивизор $-(K_Y + \frac{m-1}{m}B)$ обилен.

• *Взвешенное проективное пространство* $\mathbb{P}(s_0, \ldots, s_n)$ – это $\operatorname{Proj} \Bbbk[x_0, \ldots, x_n]$, где $\deg x_i = a_i$. Множество замкнутых точек $\mathbb{P}(s_0, \ldots, s_n)$ описывается как фактор $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$ по отношению эквивалентности $(a_0, \ldots, a_n) \sim (\lambda^{s_0} a_0, \ldots, \lambda^{s_n} a_n)$, $\lambda \in \Bbbk^*$. Другое описание: $\mathbb{P}(s_0, \ldots, s_n) = \mathbb{P}^n / \mathbb{Z}_{s_0} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{s_n}$ (действие $\mathbb{Z}_{s_0} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{s_n}$ – покоординатное). Если наборы весов двух взвешенных проективных пространств пропорциональны, то эти пространства изоморфны. Более того, любое взвешенное проективное пространство может быть записано в виде $\mathbb{P}(s_0, \ldots, s_n)$, где $(s_0, \ldots, \hat{s}_i, \ldots, s_n) = 1$ для всех i. в таком случае говорят, что набор $(s_0, \ldots, s_n)$ *хорошо сформирован*. При этом условии можно записать, что

$$-K_{\mathbb{P}} = (s_0 + \cdots s_n)A,$$

где A – положительный порождающий группы классов дивизоров Вейля $\operatorname{Cl}(\mathbb{P}) \simeq \mathbb{Z}$. Здесь $\mathscr{O}(A) = \mathscr{O}_{\mathbb{P}}(1)$. Пусть $X \subset \mathbb{P}$ – полное пересечение гиперповерхностей степеней $d_1, \ldots, d_m$. Предположим, что X неособо и содержится в неособой части $\mathbb{P}$. Если $\sum d_i < \sum s_j$, то X – многообразие Фано. Например, общая гиперповерхность $X_{2s} \subset \mathbb{P}(1, \ldots, 1, s)$ – многообразие Фано $\iff$ $s \leq \dim X$. Это многообразие имеет структуру двойного накрытия $X \to \mathbb{P}^{\dim X}$.

- *Грассманианы и однородные пространства.*

Теорема. *Пусть* $G = \mathrm{Gr}(k,n)$ *– многообразие Грассмана. Тогда* $\mathrm{Pic}\, G \simeq \mathbb{Z}$ *и* $-K_G \sim nH$*, где* H *– обильная образующая* $\mathrm{Pic}\, G$*. В частности,* G *– многообразие Фано индекса* n*.*

Доказательство. Элемент $a \in G$ задается $k \times n$-матрицей A максимального ранга. Причем матрицы, отличающиеся элементарными преобразованиями строк, задают один и тот же элемент. Запишем $A = \big(A_1 \mid A_2\big)$, где A_1 (соотв. A_2) – матрица размера $k \times k$ (соотв. $k \times (n-k)$). Рассмотрим открытое подмножество $U \subset G$, заданное условием $\det A_1 \neq 0$. Любой элемент $a \in U$ представляется матрицей $A = \big(E \mid X\big)$. Пусть $X = (x_{i,j})$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_{1,k+1} & \cdots & x_{1,n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_{2,k+1} & \cdots & x_{2,n} \\ \hdotsfor{7} \\ \hdotsfor{7} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{k,k+1} & \cdots & x_{k,n} \end{pmatrix}$$

Здесь $x_{i,j}$ могут рассматриваться как координаты на U. Таким образом, $U \simeq \mathbb{A}^{k(n-1)}$. Пусть $H = G \setminus U$. Из точной последовательности вырезания имеем

$$H \cdot \mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Pic}\, G \longrightarrow \mathrm{Pic}\, U = 0.$$

Следовательно, $\mathrm{Pic}\, G = \mathbb{Z} \cdot H$. Перейдем в другую карту. Для этого элементарными преобразованиями строк перейдем от A

к матрице

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{x_{1,k+1}} & 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{x_{1,k+2}}{x_{1,k+1}} & \cdots & \frac{x_{1,n}}{x_{1,k+1}} \\ -\frac{x_{2,k+1}}{x_{1,k+1}} & 1 & \cdots & 0 & 0 & x_{2,k+2} - x_{2,k+1}\frac{x_{1,k+2}}{x_{1,k+1}} & \cdots & x_{2,n} - x_{2,k+1}\frac{x_{1,n}}{x_{1,k+1}} \\ \hdotsfor{8} \\ \hdotsfor{8} \\ -\frac{x_{k,k+1}}{x_{1,k+1}} & 0 & \cdots & 1 & 0 & x_{k,k+2} - x_{k,k+1}\frac{x_{1,k+2}}{x_{1,k+1}} & \cdots & x_{k,n} - x_{k,k+1}\frac{x_{1,n}}{x_{1,k+1}} \end{pmatrix}$$

Новыми координатами будут

$$x'_{i,k+1} = -\frac{x_{i,k+1}}{x_{1,k+1}}, \quad i = 2, \dots, k, \quad x'_{1,k+1} = -\frac{1}{x_{1,k+1}},$$

$$x'_{1,j} = \frac{x_{1,j}}{x_{1,k+1}}, \quad j = k+2, \dots, n,$$

$$x'_{i,j} = x_{i,j} - x_{i,k+1}\frac{x_{1,j}}{x_{1,k+1}}, \quad i =, \quad j = .$$

Рассмотрим дифференциальную форму $\omega = \mathrm{d}\, x'_{1,k+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\, x'_{k,n}$. Тогда

$$\omega = u\frac{1}{x^2_{1,k+1}}\frac{1}{x^{k-1}_{1,k+1}}\frac{1}{x^{n-k-1}_{1,k+1}}\,\mathrm{d}\, x_{1,k+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\, x_{k,n},$$

где u – обратимый элемент. Получаем $K_G = (\omega) = -nH$, где H задается $x_{1,k+1} = 0$. $\square$

Заметим, что дивизор H является гиперплоским сечением при вложении Плюккера. Следовательно, линейная система $|mH|$

очень обильна при $m > 0$ и по теореме Бертини она содержит неприводимый неособый элемент.

Следствие. *Пусть $D \in |mH|$ – неособый элемент. Если $m < n$, то D – многообразие Фано индекса $n - m$.*

- *Раздутия.* Пусть X – проективное многообразие, пусть $\mathscr{L}$ – линейная система дивизоров Картье на X без неподвижных компонент и пусть $Z := \operatorname{Bs} \mathscr{L}$ (как схема). Пусть $f : \tilde{X} \to X$ – раздутие Z и пусть $\tilde{\mathscr{L}} := f_*^{-1}\mathscr{L}$ – бирациональный прообраз. Тогда линейная система $\tilde{\mathscr{L}}$ не имеет базисных точек. В частности, она численно эффективна.

Пример. Пусть $X = \mathbb{P}^n$, Z – точка и $\mathscr{L}$ – линейная система гиперплоскостей, проходящих через Z. Тогда раздутие $\tilde{X}$ в Z – многообразие Фано. Действительно, $-K_{\tilde{X}} \sim -f^*K_X - (n-2)E$, где E – исключительный дивизор. Отсюда

$$-K_{\tilde{X}} \sim (n+1)f^*\mathscr{L} - (n-2)E \sim (n-2)\tilde{\mathscr{L}} + 2f^*\mathscr{L}.$$

Этот дивизор обилен по критерию обильности Клеймана.

4 Существование гладкого дивизора

Теорема. *Пусть X – поверхность дель Пеццо. Существует неособая кривая $L \in |-K_X|$.*

По теореме Римана-Роха
$$\dim|-K_X| = K_X^2 > 0.$$
Пусть $L \in |-K_X|$ – общий элемент. Существует последовательность раздутий точек $f : \tilde{X} \to X$ и дивизор $\sum E_i$ на $\tilde{X}$ с простыми нормальными пересечениями такие, что

- $\mathbb{Q}$-дивизор $qf^*L - \sum p_i E_i$ обилен для некоторых $0 < p_i \ll q \ll 1$;
- $f^*L = \tilde{L} + \sum r_i E_i$, где $r_i \geq 0$, а линейная система $|\tilde{L}|$ свободна;
- $K_{\tilde{X}} = f^*K_X + \sum a_i E_i$, где $a_i \geq 0$, причем E_i не является компонентой $\mathrm{Exc}(f) \iff a_i = 0$.

Положим
$$c := \min\left\{ \frac{a_1 + 1 - p_i}{r_i} \;\middle|\; r_i \neq 0 \right\}.$$
Мы можем считать, что минимум достигается только для $i = 0$. Пусть $E := E_0$. Для $t \in \mathbb{Z}$ рассмотрим $\mathbb{Q}$-дивизор
$$\begin{aligned} N = N(t) &= tf^*L + \sum(-cr_i + a_i - p_i)E_i - K_{\tilde{X}} = \\ &= c\tilde{L} + (t + 1 - c)f^*L - \sum p_i E_i. \end{aligned}$$
Ясно, что
$$\lceil N \rceil = tf^*L - K_{\tilde{X}} + A - E, \quad A \geq 0, \quad A \subset \mathrm{Exc}(f)$$
и E – не компонента A.

Лемма. • $c \le 2 - q \Longrightarrow H^0(\mathscr{O}_E(f^*L + A)) = 0$;

• $c \le 1 - q \Longrightarrow \dim H^0(\mathscr{O}_E(A)) = 1$.

Доказательство. • По теореме Каваматы-Фивега

$$H^1(\mathscr{O}_{\tilde{X}}(f^*L + A - E)) = 0.$$

Отсюда

$$H^0(\mathscr{O}_{\tilde{X}}(f^*L+A-E)) \hookrightarrow H^0(\mathscr{O}_{\tilde{X}}(f^*L+A)) \twoheadrightarrow H^0(\mathscr{O}_E(f^*L+A))$$

Предположим, что $H^0(\mathscr{O}_E(f^*L + A)) \neq 0$. Тогда стрелка слева не является изоморфизмом. Следовательно, существует эффективный дивизор $D \sim f^*L + A$, у которого E не является компонентой. Так как $f_*D \sim L$, то E – исключительный дивизор. Так как $D - A \sim f^*L$, то по лемме об отрицательности $D - A$ эффективен и $D - A = f^*L'$. Противоречие.

• По теореме Каваматы-Фивега $H^1(\mathscr{O}_{\tilde{X}}(A - E)) = 0$ и

$$H^0(\mathscr{O}_{\tilde{X}}(A - E)) \hookrightarrow H^0(\mathscr{O}_{\tilde{X}}(A)) \twoheadrightarrow H^0(\mathscr{O}_E(A))$$

Достаточно доказать, что $H^0(\mathscr{O}_{\tilde{X}}(A - E)) = 0$. В противном случае существует эффективный дивизор $D \sim A - E$. Тогда $f_*D \sim -f_*E$. Следовательно, E – исключительный дивизор. Имеет место разложение $D = D_{\mathrm{nonexc}} + D_{\mathrm{exc}}$, $D_{\mathrm{nonexc}}, D_{\mathrm{exc}} \ge 0$. Но тогда $D_{\mathrm{nonexc}} \sim A - E - D_{\mathrm{exc}}$, где последний дивизор – исключительный. Противоречие. □

Рассмотрим многочлен (степени ≤ 1)

$$\chi(t) := \chi(\mathscr{O}_E(tf^*L + A)).$$

По теореме Каваматы-Фивега

$$\chi(t) = \dim H^0(\mathscr{O}_E(tf^*L + A)).$$

при $t \geq c + q - 1$.

Лемма. *$c > 1 - q$.*

Доказательство. В противном случае $\chi(0) = 1$ и $\chi(1) = 0$. Это противоречит тому, что $\chi(t) > 0$ при $t \gg 0$. □

Следствие. *$a_i + 1 \geq r_i, \ \ \forall i$.*

Следствие. *L – приведенная кривая, имеющая лишь обыкновенные двойные точки.*

Лемма. *Если L особа, то $c \leq 2 - q$.*

Окончание доказательства. Имеем $\chi(1) = 0$. Так как $\chi(t) > 0$ при $t \gg 0$, то E – не исключительный дивизор. По формуле для рода

$$2p_a(f(E)) - 2 = (K_X + f(E)) \cdot f(E) = -(L - f(E)) \cdot f(E) \leq 0.$$

Следовательно, $g(E) \leq p_a(f(E)) \leq 1$. Равенство $\chi(1) = 0$ невозможно.

Теорема. *Пусть X – n-мерное многообразие Фано индекса $r \geq n-1$. Пусть L – обильный дивизор на X такой, что $-K_X = rL$. Существует неособый элемент $L \in |L|$.*

Рассмотрим многочлен $\chi(t) = \chi(tL)$ степени n. По теореме Кодаиры об обращении в нуль $\chi(t) = \dim H^0(X, tL)$ при $t > -r$. Следовательно, $\chi(t)$ имеет корни в точках $t = -1, \ldots -(n-2)$ и $\chi(0) = 1$. По теореме Римана-Роха старший коэффициент равен $d/n!$, $d = L^n$ и по двойственности Серра $\chi(-r-t) = (-1)^n \chi(t)$. Это дает нам

$$\chi(t) = \tfrac{1}{n!}(t+1)\cdots(t+n-2)$$
$$\Big(dt^2 + \tfrac{d}{2}\big(nr - (n-1)(n-2)\big)t + n(n-1)\Big)$$

В частности,

$$\dim |L| = \frac{d}{2}(r-n+3) - 2 > 0.$$

Пусть $L \in |L|$ – общий элемент. Существует бирациональный проективный морфизм (разрешение) $f : \tilde{X} \to X$ и дивизор $\sum E_i$ на $\tilde{X}$ с простыми нормальными пересечениями такие, что

- $\mathbb{Q}$-дивизор $qf^*L - \sum p_i E_i$ обилен для некоторых $0 < p_i \ll q \ll 1$;
- $f^*L = \tilde{L} + \sum r_i E_i$, где $r_i \geq 0$, а линейная система $|\tilde{L}|$ свободна;

• $K_{\tilde{X}} = f^*K_X + \sum a_i E_i$, где $a_i \geq 0$, причем E_i не является компонентой $\mathrm{Exc}(f) \iff a_i = 0$.

Положим

$$c := \min \left\{ \frac{a_1 + 1 - p_i}{r_i} \;\middle|\; r_i \neq 0 \right\}.$$

Мы можем считать, что минимум достигается только для $i = 0$. Пусть $E := E_0$. Для $t \in \mathbb{Z}$ рассмотрим $\mathbb{Q}$-дивизор

$$\begin{aligned} N = N(t) &= tf^*L + \sum(-cr_i + a_i - p_i)E_i - K_{\tilde{X}} = \\ &= c\tilde{L} + (t + r - c)f^*L - \sum p_i E_i. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\lceil N \rceil = tf^*L - K_{\tilde{X}} + A - E, \quad A \geq 0, \quad A \subset \mathrm{Exc}(f)$$

и E – не компонента A.

Лемма. • *$c \leq 1 + r - q \implies H^0(\mathscr{O}_E(f^*L + A)) = 0$;*

• *$c \leq r - q \implies \dim H^0(\mathscr{O}_E(A)) = 1$.*

Доказательство. • По теореме Каваматы-Фивега

$$H^1(\mathscr{O}_{\tilde{X}}(f^*L + A - E)) = 0.$$

Отсюда

$$H^0(\mathscr{O}_{\tilde{X}}(f^*L + A - E)) \hookrightarrow H^0(\mathscr{O}_{\tilde{X}}(f^*L + A)) \twoheadrightarrow H^0(\mathscr{O}_E(f^*L + A))$$

Предположим, что $H^0(\mathscr{O}_E(f^*L+A)) \neq 0$. Тогда стрелка слева не является изоморфизмом. Следовательно, существует эффективный дивизор $D \sim f^*L+A$, у которого E не является компонентой. Так как $L' := f_*D \sim L$, то E – исключительный дивизор. Так как $D-A \sim f^*L$, то по лемме об отрицательности $D-A$ эффективен и $D-A = f^*L'$. Противоречие.

- По теореме Каваматы-Фивега $H^1(\mathscr{O}_{\tilde{X}}(A-E)) = 0$ и

$$H^0(\mathscr{O}_{\tilde{X}}(A-E)) \hookrightarrow H^0(\mathscr{O}_{\tilde{X}}(A)) \twoheadrightarrow H^0(\mathscr{O}_E(A))$$

Достаточно доказать, что $H^0(\mathscr{O}_{\tilde{X}}(A-E)) = 0$. В противном случае существует эффективный дивизор $D \sim A-E$. Тогда $f_*D \sim -f_*E$. Следовательно, E – исключительный дивизор. Имеет место разложение $D = D_{\mathrm{nonexc}} + D_{\mathrm{exc}},\ \ D_{\mathrm{nonexc}}, D_{\mathrm{exc}} \geq 0$. Но тогда $D_{\mathrm{nonexc}} \sim A - E - D_{\mathrm{exc}}$, где последний дивизор – исключительный. Противоречие. $\square$

Рассмотрим многочлен (степени $\dim f(E) \leq n-1$)

$$\chi(t) := \chi(\mathscr{O}_E(tf^*L+A)).$$

По теореме Каваматы-Фивега

$$\chi(t) = \dim H^0(\mathscr{O}_E(tf^*L+A)).$$

при $t \geq c+q-r$.

Лемма. *$a_i \geq r_i$, $\forall i$.*

Доказательство. В противном случае $c < 1 - q$. Многочлен $\chi(t)$ имеет корни $t = -1, \ldots, -(n-3)$, 1 и $\chi(0) = 1$. Если дивизор E – исключительный, то это противоречит тому, что $\chi(t) > 0$ при $t \gg 0$. Следовательно, $\dim f(E) = n-1$ и

$$\chi(t) = \beta(t+1)\cdots(t+n-3)(t-1)(t-\alpha),$$

$$\chi(0) = 1 = \beta(n-1)!\alpha, \qquad \beta = \frac{1}{(n-1)!} f^*L^{n-1} \cdot E.$$

Предположим, что $\dim X = 3$. Тогда $f(E)$ – поверхность. Положим $S := f(E)$, $T := f^*L|_E$, $G = A|_E$. Имеем

$$\chi(t) = \beta(t-1)(t-\alpha) = (t-1)(\beta t - 1/2) =$$
$$= \tfrac{1}{2}T^2t^2 + \tfrac{1}{2}(T\cdot(G-K_E) + T\cdot A)t + \tfrac{1}{2}G\cdot(G-K_E) + \chi(\mathscr{O}_E).$$

Сравнивая коэффициенты при t^2, получаем $2\beta = T^2$. Сравнивая коэффициенты при t, получаем

$$0 > -1 - T^2 = -2\beta - 1 = 2T\cdot G - T\cdot K_E.$$

Мы утверждаем, что правая часть неотрицательна. Предположим противное. Тогда $T\cdot K_E > 0$ (поскольку $T = f^*L|_E$ численно эффективен). Рассмотрим разложение $f_E : E \xrightarrow{\mu} S' \xrightarrow{\nu} S$, где ν – нормализация. Пусть $T' := \mu_*T$, $G' := \mu_*G$, $T_S := \nu_*T'$, $G_S := \nu_*G'$. Ясно, что $T' = \nu^*T_S$, $T = \mu^*T'$. Тогда $T'\cdot K_{S'} = T\cdot K_E > 0$ и

$$T'\cdot K_{S'} = \nu^*T_S\cdot(\nu^*K_S - R) = T_S\cdot K_S - \nu^*T_S\cdot R.$$

Отсюда $T_S \cdot K_S > 0$. С другой стороны,

$$T_S \cdot K_S = L \cdot (K_X + S) \cdot S = -(r-1)L \cdot L \cdot S - L \cdot (L - S) \cdot S < 0.$$

Противоречие. $\square$

Следствие. *Общий элемент $L \in |L|$ приведен, неприводим и нормален.*

Следствие. *Предположим, что $\dim X = 3$. Тогда L имеет лишь изолированные двойные особые точки. Для минимального разрешения $\mu : \hat{L} \to L$ имеем $K_{\hat{L}} = \mu^* K_L$.*

Следствие. *$\hat{L}$ – слабая поверхность дель Пеццо с дювалевскими особенностями.*

Теорема (В. В. Шокуров). *Пусть X – трехмерное многообразие Фано. Тогда линейная система $|-K_X|$ содержит гладкий неприводимый дивизор.*

Определение. Гладкая проективная поверхность S называется поверхностью типа K3, если $K_S = 0$ и $H^1(X, \mathscr{O}_X) = 0$.

Следствие. *Пусть X – трехмерное многообразие Фано. Тогда общий элемент $S \in |-K_X|$ является поверхностью типа K3.*

Доказательство. По формуле присоединения $K_S = 0$. Из последовательности

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}(K_X) \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{O}_S \longrightarrow 0$$

получаем $H^1(S, \mathscr{O}_S) = 0$. $\square$

5 Проективные модели поверхностей дель Пеццо

Теорема. *Пусть X – поверхность дель Пеццо и пусть r – ее индекс Фано.*

- $r \geq 3 \iff r = 3 \iff K_X^2 = 9 \iff X \simeq \mathbb{P}^2$*;*
- $r = 2 \iff X \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$*;*
- $K_X^2 = 1 \Longrightarrow \operatorname{Bs}|-K_X| = \{P\}$ *– точка,* $\operatorname{Bs}|-2K_X| = \emptyset$*, линейная система* $|-2K_X|$ *задает двулистный конечный морфизм* $X \to Q' \subset \mathbb{P}^3$ *образ которого – квадратичный конус, а дивизор ветвления высекается кубикой,* X *реализуется как гиперповерхность степени* 6 *в* $\mathbb{P}(1,1,2,3)$*;*
- $K_X^2 > 1 \Longrightarrow \operatorname{Bs}|-K_X| = \emptyset$*;*
- $K_X^2 = 2 \Longrightarrow$ *линейная система* $|-K_X|$ *задает двулистный конечный морфизм* $X \to \mathbb{P}^2$*, дивизор ветвления которого – неособая квартика* $B \subset \mathbb{P}^2$*,* X *реализуется как гиперповерхность степени* 4 *в* $\mathbb{P}(1,1,1,2)$*;*
- $d := K_X^2 > 2 \Longrightarrow$ *линейная система* $|-K_X|$ *очень обильна и задает вложение* $X = X_d \subset \mathbb{P}^d$*;*
- $K_X^2 = 3 \Longrightarrow X = X_3 \subset \mathbb{P}^3$ *– кубика;*

- $K_X^2 = 4 \Longrightarrow X = X_4 \subset \mathbb{P}^4$ – *полное пересечение двух квадрик;*

- $K_X^2 = 5 \Longrightarrow X = X_5 \subset \mathbb{P}^5$ *единственна с точностью до изоморфизма и* $X = \mathrm{Gr}(2,5) \cap \mathbb{P}^5 \subset \mathbb{P}^9$ *(вложение Плюккера);*

- $K_X^2 = 6 \Longrightarrow X = X_6 \subset \mathbb{P}^6$ *единственна с точностью до изоморфизма и* $X = (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \cap \mathbb{P}^6 \subset \mathbb{P}^7$ *(вложение Сегре);*

- $K_X^2 = 7 \Longrightarrow X = X_7 \subset \mathbb{P}^7$ *единственна с точностью до изоморфизма и является раздутием двух точек на* $\mathbb{P}^2$*;*

- $K_X^2 = 8 \Longrightarrow X \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ *или* $\mathbb{F}_1$.

Доказательство. Пусть $K_X^2 = 9$. Тогда $\mathrm{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z}$. По двойственности Пуанкаре форма пересечения на $\mathrm{Pic}(X)$ унимодулярна. Единственная возможность: $r = 3$.

Пусть $K_X^2 = 8$. Тогда $\mathrm{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Можем считать, что $r = 1$, т.е. $-K_X$ – примитивный элемент $\mathrm{Pic}(X)$. Из счета параметров следует, что в $|-K_X|$ существует приводимый или неприведенный элемент $D = \sum d_i D_i$. Выберем его так, что $\sum d_i$ – наибольшее. Пусть D_1 – кривая. Если $D_1^2 < 0$, то D_1 – (-1)-кривая и $X \simeq \mathbb{F}_1$. Если $D_1^2 = 0$, то D_1 – коника и X – линейчатая поверхность. Пусть $D_1^2 > 0$. Тогда

$2p_a(D_1) - 2 = (K_X + D_1) \cdot D_1 = -(\sum d_i D_i) \cdot D_1 < 0$. Поэтому $D_1 \simeq \mathbb{P}^1$ и $-K_X \cdot D_1 = D_1^2 + 2 \geq 3$. Из счета параметров $\dim |D_1| \leq 2$. По теореме Римана-Роха $D_1^2 - K_X \cdot D_1 \leq 4$, $2D_1^2 + 2 \leq 4$, $D_1^2 = 1$, $-K_X \cdot D_1 = 3$. Положим $D' = D - D_1$. Тогда $-K_X \cdot D' = 5$, $D_1 \cdot D' = 2$, $D'^2 = 3$. Можно считать, что D' приводим.

$\square$

Предложение. *Пусть X – поверхность дель Пеццо степени $d \geq 4$. Тогда ее антиканонический образ является пересечением квадрик.*

6 Сведения из теории Мори и др.

Определим *длину* экстремального луча как

$$\mu(R) := \min\{-K_X \cdot C \mid C \text{ – рациональная кривая, } [C] \in R\}$$

Теорема (С. Мори 1982). *Пусть X – неособое трехмерное проективное многообразие, R – экстремальный луч на X и $\varphi : X \to Z$ – соответствующее экстремальное стягивание.*

- *Если R численно не эффективен, то φ – бирациональное дивизориальное стягивание неприводимого исключительного дивизора E на кривую или в точку, причем φ является раздутием подмногообразия $\varphi(E)$ (с приведенной структурой). Возможно одно из следующих:*
  - *$\varphi(E)$ – гладкая кривая, L– слой линейчатой поверхности E, Z – гладкое многообразие, $\mu(R) = 1$,*
  - *$\varphi(E)$ – точка, Z – гладкое многообразие, L– прямая на $E \simeq \mathbb{P}^2$, $\mu(R) = 2$,*
  - *$\varphi(E)$ – обыкновенная двойная точка, $E \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $\mathscr{O}_E(E) = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(-1, -1)$, L – образующая $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $\mu(R) = 1$,*
  - *$\varphi(E)$ – двойная точка, E – квадратичный конус в $\mathbb{P}^3$, $\mathscr{O}_E(E) = \mathscr{O}_E(-1)$, L – образующая конуса, $\mu(R) = 1$,*

- $\varphi(E)$ – *четырехкратная негоренштейнова точка,* $\mathscr{O}_E(E) = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)$, L*– прямая на* $E \simeq \mathbb{P}^2$, $\mu(R) = 1$.

- *Если* R *численно эффективен, то* $\varphi : X \to Z$ *– относительная модель Фано,* Z *неособо, и возможно одно из следующих:*

  - Z *– неособая поверхность, любой слой* φ *– приведенная коника в* $\mathbb{P}^2$*, общий слой* $\simeq \mathbb{P}^1$, $1 \leq \mu(R) \leq 2$*;*
  - Z *– кривая, общий слой* φ *– поверхность дель Пеццо степени* $\neq 7$, $1 \leq \mu(R) \leq 3$*;*
  - Z *– точка, тогда* X *– многообразие Фано с* $\operatorname{Pic} X \simeq \mathbb{Z}$, $1 \leq \mu(R) \leq 4$.

Замечание. Если Z поверхность и f – гладкий морфизм, то любой слой $f \simeq \mathbb{P}^1$. Если дополнительно Z рациональна, то $\operatorname{Br}(Z) = 0$. Поэтому f имеет сечение и f локально тривиальное в топологии Зарисского $\mathbb{P}^1$-расслоение.

Замечание. Если $\dim Z \neq 2$ или $\dim Z = 2$ и морфизм – не гладкий, то имеется последовательность

$$0 \longrightarrow \operatorname{Pic} Z \xrightarrow{\varphi^*} \operatorname{Pic} X \xrightarrow{\cdot C} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Это верно также и в случае $\dim Z = 2$ для гладкого морфизма, если поверхность рациональна.

Следствие. *В условиях теоремы предположим, что X – многообразие Фано индекса 2. Тогда имеется одно из следующих:*

- $\varphi(E)$ *– точка, Z – гладкое многообразие Фано индекса 2 или 4 с $-K_Z^3 = -K_X^3 + 8$;*
- Z *– неособая поверхность дель Пеццо, φ – $\mathbb{P}^1$-расслоение;*
- $Z \simeq \mathbb{P}^1$, *любой слой φ – неприводимая квадрика в $\mathbb{P}^3$.*

Лемма. *Пусть X – неособое трехмерное многообразие и пусть $\sigma : \tilde{X} \to X$ – раздутие с гладким центром $Y \subset X$. Пусть $E := \sigma^{-1}(Y)$ – исключительный дивизор и пусть L – класс прямой на $E \simeq \mathbb{P}^2$, если Y – точка, или класс слоя линейчатой поверхности $E \to Y$, если Y – кривая. Тогда:*

- $H^*(\tilde{X}) = (\sigma^* H^*(X) \oplus H^*(E))/\sigma^* H^*(Y) = \sigma^* H^*(X) \oplus \mathbb{Z} \cdot E \oplus \mathbb{Z} \cdot L$ *как аддитивная группа, причем*
$$\sigma_* E = \sigma_* L = 0, \quad \sigma_* \sigma^* = \mathrm{id}\,.$$
- *мультипликативная структура в $H^*(\tilde{X})$ задается следующей таблицей умножения:*
  - Y *– точка,*
  $$E^2 = -L, \quad E^3 = -E \cdot L = 1, \quad E \cdot \sigma^* Z = L \cdot \sigma^* Z = 0$$
  для любого $Z \in H^*(X)$;

– Y – *кривая*,

$$
\begin{aligned}
&E^2 = -\sigma^* Y + c_1(N_{Y/X})L,\\
&E^3 = -c_1(N_{Y/X}), \qquad E\cdot L = -1,\\
&E\cdot\sigma^* D = (Y\cdot D)L, \quad L\cdot\sigma^* D = 0, \quad \forall D\in H^2(X),\\
&E\cdot\sigma^* C = L\cdot\sigma^* C = 0, \quad \forall C\in H^4(X).
\end{aligned}
$$

Напомним, что $c_1(N_{Y/X})$ находится из точной последовательности

$$0 \longrightarrow T_Y \longrightarrow T_X \longrightarrow N_{Y/X} \longrightarrow 0$$

и поэтому

$$c_1(N_{Y/X}) + 2 - 2g(Y) = -K_X\cdot Y,$$

где $g(Y)$ – род кривой Y.

7 Трехмерные многообразия Фано индекса 2

Теорема. *Пусть X – трехмерное многообразие Фано индекса $r > 1$ и пусть $-K_X = rH$.*

- $r \geq 4 \Longleftrightarrow r = 4 \Longleftrightarrow X \simeq \mathbb{P}^3$;
- $r = 3 \Longleftrightarrow X = X_2 \subset \mathbb{P}^4$ *– квадрика;*
- $r = 2 \Longrightarrow 1 \leq H^3 \leq 7$;
- $r = 2 \ \&\ H^3 = 1 \Longrightarrow \operatorname{Bs}|H| = \{P\}$ *– точка, линейная система* $|-K_X|$ *задает двулистный конечный морфизм* $X \to W \subset \mathbb{P}^3$ *образ которого – конус над поверхностью Веронезе, а дивизор ветвления высекается кубикой,* X *реализуется как гиперповерхность степени* 6 *в* $\mathbb{P}(1,1,1,2,3)$;
- $r = 2 \ \&\ H^3 > 1 \Longrightarrow \operatorname{Bs}|H| = \emptyset$;
- $H^3 = 2 \Longrightarrow |H|$ *задает двулистный конечный морфизм* $X \to \mathbb{P}^3$ *дивизор ветвления которого – неособая квартика* $B \subset \mathbb{P}^3$, X *реализуется как гиперповерхность степени* 4 *в* $\mathbb{P}(1,1,1,1,2)$;
- $r = 2 \ \&\ d := H^3 > 2 \Longrightarrow |H|$ *очень обильна и задает вложение* $X = X_d \subset \mathbb{P}^{d+1}$;

- $H^3 = 3 \Longrightarrow X = X_3 \subset \mathbb{P}^4$ – *кубика;*
- $H^3 = 4 \Longrightarrow X = X_4 \subset \mathbb{P}^5$ – *полное пересечение двух квадрик.*

Следствие. *Если $r \geq 3$ или $r = 4$ и $H^3 \leq 4$, то* $\operatorname{Pic} X \simeq \mathbb{Z}$.

Предложение. *Пусть X – трехмерное многообразие Фано индекса 2 степени $d \geq 4$. Тогда его полу-антиканонический образ является пересечением квадрик.*

Предложение. *Пусть X – многообразие Фано индекса 2. Тогда*

- $H^3 \leq 7$.
- *Если $H^3 = d \geq 6$, то* $\operatorname{Pic}(X) \not\simeq \mathbb{Z}$.

Доказательство. Пусть $H^3 = 9$. Тогда H – поверхность дель Пеццо степени 9, т.е. $H \simeq \mathbb{P}^2$. По теореме Лефшеца о гиперплоском сечении ограничение $\operatorname{Pic}(X) \to \operatorname{Pic}(H)$ является вложением и его образ – примитивная подрешетка в $\operatorname{Pic}(H) \simeq \mathbb{Z}$. Таким образом, $H|_H$ – образующая $\operatorname{Pic}(H)$. С другой стороны, по формуле присоединения $K_H = -H|_H$ – противоречие. Аналогично рассуждаем в случае $H^3 = 8$, $H \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ и получаем $r > 2$.

Пусть $H^3 = 8$ и $H \simeq \mathbb{F}^1$. Рассмотрим общий пучок гиперплоских сечений H_t. Пусть L_t – единственная (-1)-кривая в общем $H_t \simeq \mathbb{F}^1$. Кривые L_t заметают поверхность. Пусть E – ее замыкание. Тогда $E \cap H_t = L_t$. Следовательно, E – плоскость и поэтому $\operatorname{Pic} X \not\simeq \mathbb{Z}$. По формуле присоединения $\mathscr{O}_E(E) = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$. Следовательно, имеется стягивание экстремального луча $\varphi : X \to Z$, где Z неособо и φ – раздутие точки. Тогда Z – многообразие Фано индекса 2 или 4 с $-\frac{1}{8}K_Z^3 = H^3 + 1 > 8$. Противоречие.

Пусть $H^3 = 7$. Тогда H – поверхность дель Пеццо степени 7. Она содержит ровно три (-1)-кривые, причем ровно одна из них, скажем L, пересекает две другие. Как и выше получаем, что X содержит плоскость E такую, что $\mathscr{O}_E(E) = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$. Стягивание соответствующего экстремального луча $\varphi : X \to Z$ приводит к $Z = \mathbb{P}^3$.

Пусть $H^3 = 6$. Предположим $\operatorname{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z}$. Рассмотрим произвольную прямую ℓ. Пусть S – объединение всех прямых на X, пересекающих ℓ. Тогда S – поверхность и $S \sim aH$ для некоторого $a > 0$. Пусть H – неособое гиперплоское сечение, проходящее через ℓ. Тогда прямые на H образуют "шестиугольник". Пусть ℓ' – прямая на H, "противоположная" к ℓ. Тогда $S \cap \ell' = \emptyset$ (поскольку $S \cap \ell' \cap H = \emptyset$). Но тогда S не может быть обильным дивизором. Противоречие. $\square$

Предложение. *Пусть X – трехмерное многообразие Фано индекса 2 с $\rho(X) > 1$. Тогда X – одно из следующих:*

- $K_X^2 = 7 \Longrightarrow X = X_7 \subset \mathbb{P}^8$ – *раздутие точки на* $\mathbb{P}^3$*;*

- $K_X^2 = 6 \Longrightarrow$ *или* $X \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ *или* X – *дивизор бистепени* $(1,1)$ *в* $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$.

Доказательство. Пусть $f : X \to Z$, $f' : X \to Z'$– различные экстремальные стягивания и пусть F и F' – их общие слои. Заметим, $F \cap F'$ не содержит кривых. Рассмотрим случаи.

- $Z \simeq \mathbb{P}^1 \Longrightarrow \rho(X) = 2$ и Z' – поверхность с $\rho(Z) = 1 \Longrightarrow Z' \simeq \mathbb{P}^2$ и f' – $\mathbb{P}^1$-расслоение $\Longrightarrow f \times f' : X \to Z \times Z' = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ – конечный морфизм. Тогда $2S = -K_X = -f^*K_{\mathbb{P}^1} - f'^*K_{\mathbb{P}^2} - B$ $\Longrightarrow 2d = 2S^3 = -f^*K_{\mathbb{P}^1} \cdot S^2 - f'^*K_{\mathbb{P}^2} \cdot S^2 - B \cdot S^2 \Longrightarrow B \cdot S^2 = 2d - 4 - 9 = 2d - 13 \Longrightarrow d = 7$, $B \cdot S^2 = 1$, т.е. S – плоскость. Пересекая со слоями f' получим противоречие.

- Оба стягивания бирациональны и пусть E, E' – исключительные дивизоры $\Longrightarrow E \cap E' = \emptyset$. Разлагая S^2 по экстремальным лучам, получим противоречие.

- Пусть f бирационально и Z имеет структуру $\mathbb{P}^1$-расслоения $g : Z \to W$. Тогда собственный прообраз слоя g, проходящий через центр раздутия имеет нулевой индекс пересечения с K_X. Противоречие. Следовательно, мы можем считать, что Z – поверхность, не содержащая (-1)-кривых $\Longrightarrow Z \simeq \mathbb{P}^2$ или $Z \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

- $Z \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \Longrightarrow \rho(X) = 3$. Имеется по крайней мере 3 таких стягивания. Они задают по крайней мере 3 морфизма $g_i : X \to \mathbb{P}^1$. Получаем конечный морфизм $g_1 \times g_2 \times g_3 : X \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, который должен быть изоморфизмом.

• $Z \simeq \mathbb{P}^2 \Longrightarrow \rho(X) = 2$. Если f' бирационально, то $\rho(Z') = 1$ и $H'^3 = d+1 \Longrightarrow H'^3 \neq 6,\ 7 \Longrightarrow Z' \simeq \mathbb{P}^3$. Пусть $Z' \simeq \mathbb{P}^2$. Получаем конечный морфизм $f \times f' : X \to Z \times Z' = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$, который должен быть вложением.

• *Другое доказательство.* Пусть X – многообразие Фано индекса 2 с $\operatorname{Pic} X \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ и $H^3 = d$. Тогда на X имеется ровно 2 экстремальных стягивания $f : X \to Z$ и $f' : X \to Z'$. Если имеются дивизоры D и D' отображаемые в точки морфизмом f и f' соответственно, то $D \cap D' = \emptyset$. С другой стороны, H^2 – обильная кривая и допускает разложение по нашим экстремальным лучам: $H^2 = \alpha R + \beta R'$, $\alpha,\ \beta > 0$. Тогда $0 < H^2 \cdot D = \beta R \cdot D \leq 0$. Противоречие. Из классификации экстремальных лучей получаем, что по крайней мере одно из стягиваний является $\mathbb{P}^1$-расслоением. Мы можем считать, что $Z \simeq \mathbb{P}^2$ и f – $\mathbb{P}^1$-расслоение. Пусть $L = f^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$. Тогда

$$L^3 = 0, \quad L^2 \cdot H = 1, \quad L \cdot H^2 = 3.$$

Пусть $L' = f'^*\mathscr{O}_{Z'}(1)$ если $Z' = \mathbb{P}^2$ или $\mathbb{P}^1$ и L' – f'-исключительный дивизор, если f' бирационально. Запишем $L' \sim aH - bL$, $a, b > 0$. Имеем

$$\begin{aligned} &L'^3 = (da^2 - 9ab + 3b^2)a, \\ &L'^2 \cdot H = da^2 - 6ab + b^2, \\ &L' \cdot H^2 = da - 3b. \end{aligned}$$

Если f' бирационально, то $L'^3 = 1$, $a = 1$, $1 = L' \cdot H^2 = d - 3b$, $b =$

2, $d = 7$. Если f' – расслоение на квадрики, то $L'^3 = L'^2 \cdot H = 0$. Отсюда $3a = 2b$, $2da = 9b$. Система не имеет решений. Наконец, пусть f' – $\mathbb{P}^1$-расслоение. Тогда $L'^3 = 0$, $da^2 - 9ab + 3b^2 = 0$, $L'^2 \cdot H = 1 = da^2 - 6ab + b^2$, $3ab - 2b^2 = 1$, $b = 1$, $a = 1$, $d = 6$. □

Предложение. *Пусть $X = X_d \subset \mathbb{P}^{d+1}$ – многообразие Фано индекса 2 степени $3 \le d \le 7$.*

- *На X существует прямая.*
- *Пусть $L \subset X$ – прямая. Через L можно провести неособое гиперплоское сечение.*
- *$N_{L/X} \simeq \mathscr{O} \oplus \mathscr{O}$ или $\mathscr{O}(-1) \oplus \mathscr{O}(1)$.*
- *Пусть $\tau(X)$ – схема Гильберта, параметризующая прямые на X. Тогда $\tau(X)$ приведена, неособа и размерность любой компоненты $= 2$.*
- *Пусть $\Gamma(X) \to \tau(X)$ – универсальное семейство. Если $\mathrm{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z}$, то естественная проекция $\pi : \Gamma(X) \to X$ – конечный в общей точке морфизм. $N_{L/X} \simeq \mathscr{O} \oplus \mathscr{O} \iff \pi$ эtален в точке $[L]$.*
- *Если $d \ge 3$, то через любую точку проходит не более 4 прямых.*

Доказательство. • Прямая существует на неособом гиперплоском сечении.

• Счёт параметров: гиперплоские сечения, проходящие через L образуют подпространство коразмерности 2 в $(\mathbb{P}^{d+1})^*$. Особые в некоторой точке L гиперплоские сечения образуют подмногообразие коразмерности ≥ 3.

• Имеем разложение $N_{L/X} = \mathscr{O}(a) + \mathscr{O}(b)$. Далее

$$0 \longrightarrow N_{L/H} \longrightarrow N_{L/X} \longrightarrow N_{H/X}|_L \longrightarrow 0$$

где $N_{L/H} = \mathscr{O}(-1)$ и $N_{H/X}|_L = \mathscr{O}(1)$. Отсюда $a+b=0$. Так как $h^0(N_{L/X}) \leq h^0(N_{H/X}|_L) = 2$, то $a,\ b \leq 1$.

• Следует из теории деформаций: $T_{[L],\Gamma(X)} \simeq H^0(L, N_{L/X})$ и поскольку $H^1(X, N_{L/X}) = 0$.

• Так как $\operatorname{Hom}(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) = 0$, то дифференциал

$$\mathrm{d}\pi : N_{\pi(L)/\Gamma(X)} = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow N_{L/X}$$

вырожден вдоль $L \Longleftrightarrow N_{L/X} \simeq \mathscr{O}(1) \oplus \mathscr{O}(-1)$.

• Последнее утверждение следует из того, что X – пересечение квадрик. $\square$

Теорема. *Пусть X – трехмерное многообразие Фано индекса 2 с $K_X^2 = 5$ и пусть $-K_X = 2H$. Тогда $\operatorname{Pic} X \simeq \mathbb{Z}$, $X = X_5 \subset \mathbb{P}^6$ единственно с точностью до изоморфизма и $X = \operatorname{Gr}(2,5) \cap \mathbb{P}^6 \subset \mathbb{P}^9$ (вложение Плюккера).*

Доказательство. Пусть X – многообразие Фано индекса 2 и степени 5. Пусть $L \subset X$ – прямая. Пусть $f : \tilde{X} \to X$ – раздутие L, пусть $H^* := f^*H$ и пусть E – исключительный дивизор. Тогда $\tilde{X}$ – многообразие Фано и $-K_{\tilde{X}} = 2H^* - E$. Пусть R – второй экстремальный луч на $\tilde{X}$ (отличный от луча, порождённого исключительными кривыми f) и пусть $g : \tilde{X} \to Y$ – его стягивание. Линейная система $|H^* - E|$ не имеет базисных точек и $\dim|H^* - E| \geq 6 - 2 = 4$. Легко вычисляется, что $(H^* - E)^3 = 2$. Поэтому образ $\tilde{X}$ при отображении, заданным этой линейной системой – квадрика в $\mathbb{P}^4$. В частности, это отображение бирационально и не является изоморфизмом. Линейная система, стягивает кривые и поэтому должна быть опорной для g. Следовательно, Y – наша квадрика. Так как для квадрики с изолированной особенностью ранг группы классов дивизоров Вейля равен 2, то Y неособа. Несложно также получить, что $(H^* - E)^2 \cdot E = 2$, т.е. $g(E)$ – гиперплоское сечение и $(H^* - E)^2 \cdot (H^* - 2E) = 0$, т.е. стягивается дивизор $D \sim H^* - 2E$. Слоями g будут собственные прообразы прямых, пересекающих L. Если $N_{L/X} \simeq \mathscr{O} \oplus \mathscr{O}$, то $g(E)$ – неособое гиперплоское сечение, а если $N_{L/X} \simeq \mathscr{O}(-1) \oplus \mathscr{O}(1)$, то неособое. $\square$

8 Трехмерные многообразия Фано индекса 1

Теорема. *Пусть X – многообразие Фано. Тогда $-K_X^3 = 2g-2$, где $g \in \mathbb{Z}$, $g \geq 2$, и $\dim|-K_X| = 2g-2$. Число g называется родом X.*

Теорема (В. А. Исковских). *Пусть X – многообразие Фано рода g с $\operatorname{Pic} X = \mathbb{Z}$. Тогда*

(i) *линейная система $|-K_X|$ не имеет базисных точек;*

(ii) *линейная система $|-K_X|$ не является очень обильной только в следующих случаях:*

а) *$g = 2$ и $\psi_{|-K_X|}\colon X \to \mathbb{P}^3$ – двойное накрытие с ветвлением в поверхности степени 6.*

б) *$g = 3$ и $\psi_{|-K_X|}\colon X \to Q \subset \mathbb{P}^4$ – двойное накрытие квадрики с ветвлением в поверхности степени 8.*

(iii) *Пусть линейная система $|-K_X|$ задает вложение $\psi_{|-K_X|}\colon X \hookrightarrow \mathbb{P}^{g+1}$. Тогда $g \geq 3$ и образ $X = \psi_{|-K_X|}(X)$ имеет степень $2g-2$. Более того,*

а) *при $g = 3$ $X = X_4 \subset \mathbb{P}^4$ – квартика,*

б) *при $g = 4$ $X = X_6 \subset \mathbb{P}^4$ – полное пересечение квадрики и кубики,* в) *при* $g = 5$ $X = X_8 \subset \mathbb{P}^4$ *– полное пересечение трех квадрик.*

(iv) *При* $g \geq 5$ *образ* $X_{2g-2} = \psi_{|-K_X|}(X)$ *является пересечением квадрик.*

Теорема (В. А. Исковских). *Пусть* X *– многообразие Фано рода* g *с* $\operatorname{Pic} X = \mathbb{Z}$. *Тогда* $g \leq 12$ *и* $g \neq 11$.

Теорема (В. В. Шокуров). *На любом многообразии Фано* X *(*$\operatorname{Pic} X \simeq \mathbb{Z}(-K_X)$*) существует прямая.*

- *Мы изучим только случаи* $g = 12$, 10 *и* 9.
- *Обозначения:*
- $g = 9$: $Y = \mathbb{P}^3$, $\Gamma \subset \mathbb{P}^3$ – гладкая неприводимая кривая степени 7 и рода 3, не являющаяся гиперэллиптической.
- $g = 10$: $Y = Y_2 \subset \mathbb{P}^4$ – гладкой квадрика, $\Gamma \subset Y$ – гладкая неприводимая кривая степени 7 и рода 2.
- $g = 12$: $Y = Y_5 \subset \mathbb{P}^6$ – многообразие Фано индекса 2 степени 5, $\Gamma \subset Y$ – гладкая неприводимая кривая степени 5 и рода 0.

Предложение. *В обозначениях выше* Γ *содержится в единственной поверхности* $F \subset Y$ *степени* $d = 5$, 4 *и* 3 *при* $g = 12$, 10 *и* 9, *соответственно.*

Предложение. *В условиях выше предположим, что F неособа. Тогда F – поверхность дель Пеццо и при подходящем выборе стандартного базиса $\mathbf{h}, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ в $\operatorname{Pic} F$ имеем*

- *$d = 5$:* $\Gamma \sim 2\mathbf{h} - \mathbf{e}_1$;
- *$d = 4$:* $\Gamma \sim 4\mathbf{h} - 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4$;
- *$d = 3$:* $\Gamma \sim 4\mathbf{h} - \sum_{i=1}^{5} \mathbf{e}_i$.

Следствие. *Пусть Γ – гладкая неприводимая кривая па гладкой поверхности Дель Пеццо $F \subset \mathbb{P}^d$ степени d.*

- *$d = 5$:* $\Longrightarrow \Gamma$ *имеет ровно три различных 2-секущих.*
- *$d = 4$:* $\Longrightarrow \Gamma$ *то имеет ровно четыре различных 3-секущих.*
- *$d = 3$:* $\Longrightarrow \Gamma$ *имеет ровно пять различных 4-секущих.*

- *Флоп Атьи.* Пусть V – неособое трехмерное многообразие и пусть $C \subset V$ – неособая рациональная кривая такое, что $N_{C/V} = \mathscr{O}(-1) \oplus \mathscr{O}(-1)$. Пусть $f : \tilde{V} \to V$ – раздутие C и пусть E – исключительный дивизор. Тогда $E \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ и $\mathscr{O}_E(E) = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(-1, -1)$. Следовательно, существует коммутативная диаграмма (флоп)

$$\begin{tikzcd} & \tilde{V} \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ V \arrow[rr, dashed, "\chi"] & & V^+ \end{tikzcd}$$

где g – раздутие неособой рациональной кривой $c^+ = g(E)$, χ – изоморфизм на $V \setminus C$ и $V^+ \setminus C^+$. Имеем $K_X \cdot C = K_{X^+} \cdot C^+ = 0$.

Теорема. • *Пусть* $\Gamma \subset Y_5$ – *гладкая неприводимая кривая степени* 5 *и рода* 0, *лежащая на многообразии* $Y = Y_5 \subset \mathbb{P}^6$. *Тогда линейная система* $|\mathscr{O}_{Y_5}(3) - 2\Gamma|$ *задает бирациональное отображение* Y_5 *на антиканонически вложенное многообразие Фано* $X_{22} \subset \mathbb{P}^{13}$ *рода* 12.

• *Пусть* $\Gamma \subset \mathbb{P}^4$ – *гладкая неприводимая кривая степени* 7 *и рода* 2, *лежащая на гладкой квадрике* $Y = Y_2 \subset \mathbb{P}^4$, *Тогда линейная система* $|\mathscr{O}_{Y_2}(5) - 2\Gamma|$ *задает бирациональное отображение* Y_2 *на антиканонически вложенное многообразие Фано* $X_{18} \subset \mathbb{P}^{11}$ *рода* 10.

• *Пусть* $\Gamma \subset \mathbb{P}^3$ – *гладкая неприводимая кривая степени* 7 *и рода* 3, *не являющаяся гиперэллиптической. Тогда линейная, система* $|\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(7) - 2\Gamma|$ *задает бирациональное отображение* $\mathbb{P}^3$ *на антиканонически вложенное многообразие Фано* X_{16} *рода* 9 *в* $\mathbb{P}^{13}$

• *Каждое многообразие Фано* $X_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$ *рода* $g = 9$, 10 *или* 12 *может быть получено одним из способов описанных выше.*

• *Пояснение.* Для доказательства мы построим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& X^+ \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[r, dashed, "\chi"] & X' \arrow[dr, "\sigma"] & \\
Y \arrow[rrr, dashed, "\psi"] & & & X
\end{tikzcd}$$

где $\varphi\colon X^+ \to Y$ – раздутие Γ, χ – флоп и σ – раздутие прямой с исключительным дивизором – собственным прообразом поверхности F.

Доказательство. Пусть $\varphi\colon X^+ \to Y$ – раздутие Γ, $\Gamma^+ := \varphi^{-1}(\Gamma)$, $H^* := \varphi^* H$ – полный прообраз гиперплоского сечения Y, $f_H \subset \Gamma^+$ – слой линейчатой поверхности Γ^+, $L^* := \varphi^* L$ – полный прообраз прямой L на $Y \subset \mathbb{P}^{g-6}$, $F^+ = \varphi^{-1}(F)$ – собственный прообраз поверхности F.

Лемма. (i) $\operatorname{Pic} X^+ \simeq H^* \cdot \mathbb{Z} + \Gamma^+ \cdot \mathbb{Z} \simeq (-K_{X^+}) \cdot \mathbb{Z} + F^+ \cdot \mathbb{Z}$.

(ii) *Имеем следующую теорию пересечений на X^+:*

1) *при* $g = 12$: $H^{*3} = 5$, $H^{*2} \cdot \Gamma^+ = 0$, $H^{*2} \cdot \Gamma^+ = -5$, $\Gamma^{+3} = -8$;
2) *при* $g = 10$: $H^{*3} = 2$, $H^{*2} \cdot \Gamma^+ = 0$, $H^{*2} \cdot \Gamma^+ = -7$, $\Gamma^{+3} = -23$;
3) *при* $g = 9$: $H^{*3} = 1$, $H^{*2} \cdot \Gamma^+ = 0$, $H^{*2} \cdot \Gamma^+ = -7$, $\Gamma^{+3} = -32$;

или

$$(-K_{X^+})^3 = 2g-6, \quad (-K_{X^+})^2 \cdot F^+ = 3, \quad (-K_{X^+}) \cdot F^{+2} = -2,$$
$$F^{+3} = -2, -3, -4 \quad \textit{при} \quad g = 12, 10, 9 \quad \textit{соответственно.}$$

Доказательство. Имеем,

$$\Gamma^{+3} = -c_1(N_{\Gamma/Y}) = c_1(\Gamma) - c_1(Y)\cdot\Gamma,$$

следовательно,

$$\Gamma^{+3} = 2 - 2\cdot 5 = -8 \text{ при } g = 12,$$

$$\Gamma^{+3} = -2 - 3\cdot 7 = -23 \text{ при } g = 10 \quad \text{и}$$

$$\Gamma^{+3} = -4 - 4\cdot 7 = -32 \text{ при } g = 9.$$

Остальные соотношения 1) – 3) очевидны. Далее используются формулы

$$-K_{X^+} \sim 2H^* - \Gamma^+,\ F^+ \sim H^* - \Gamma^+ \text{ при } g = 12,$$

$$-K_{X^+} \sim 3H^* - \Gamma^+,\ F^+ \sim 2H^* - \Gamma^+ \text{ при } g = 10,$$

$$-K_{X^+} \sim 4H^* - \Gamma^+,\ F^+ \sim 3H^* - \Gamma^+ \text{ при } g = 9.$$

Лемма доказана. □

Лемма. (i) *Дивизор $-K_{X^+}$ численно эффективен.*

(ii) *Для любого эффективного дивизора D имеем $(-K_{X^+})^2\cdot D > 0$.*

Доказательство. Если $\deg \Gamma = 5$, $p_a(\Gamma) = 0$, то Γ является пересечением квадрик, поэтому линейная система $|-K_{X^+}| = |2H^* - \Gamma^+|$ свободна и численно эффективна. Пусть $\deg \Gamma = 7$, $p_a(\Gamma) = 2$ и $C^+ \subset X^+$ – неприводимая кривая такая, что $C^+ \cdot (-K_{X^+}) < 0$. Для некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ имеем $C^+ \equiv \alpha L^* - \beta f_\Gamma$ и $C^+ \cdot (-K_{X^+}) = (\alpha L^* - \beta f_\Gamma) \cdot (3H^* - \Gamma^+) = 3\alpha - \beta < 0$.

Заметим, что поверхность F обязательно содержит прямую L_1. Из точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{X^+}(3H^* - \Gamma^+) \longrightarrow \mathscr{O}_{X^+}(3H^*) \longrightarrow \mathscr{O}_{\Gamma^+}(3H^*) \longrightarrow 0$$

и

$$h^0(\mathscr{O}_{X^+}(3H^*)) = h^0(\mathscr{O}_{Y_2}(3)) = 35 - 5 = 30,$$
$$h^0(\mathscr{O}_{\Gamma^+}(3H^*)) = h^0(\mathscr{O}_\Gamma(3)) = 20$$

получаем, что $\dim|-K_{X^+}| = h^0(\mathscr{O}_{\Gamma^+}(3H^* - \Gamma^+)) - 1 \geq 9$. Если дивизор $D \in |-K_{X^+}|$ приводим, то $D = F^+ + H^*$. Такие дивизоры образуют подсистему в $|-K_{X^+}|$ коразмерности 5.

Далее имеем, $L_1^* \cdot (-K_{X^+}) = 3$, следовательно, существует неприводимый дивизор, $D \in |-K_{X^+}|$ содержащей L_1^*. Ясно, что $D \cdot C^+ < 0$, $F^+ \cdot C^+ < 0$, поэтому $D \cdot F^+$ содержит $C^+ + L_1^*$ и

$$\alpha + \beta = (C^+ + L_1^*) \leq D \cdot F^+ \cdot H^* = (3H^* - \Gamma^+) \cdot (2H^* - \Gamma^+) \cdot H^* = 5.$$

Таким образом, достаточно рассмотреть случаи $\alpha = 1, 2, 3, 4$ Для кривой $C = \varphi_* C^+$ имеем $\deg C = \alpha$, $\#C \cap \Gamma = \beta > 3\alpha$.

1) Если $\alpha = \deg C = 1$, то $\beta \geq 4$, т. е. C – 4-секущая Γ. Этот случай невозможен.

2) Если $\alpha = \deg C = 2$, то C – коника, содержащаяся в плоскости $\mathbb{P}^2$ и $\beta \geq 7$. Но \$$\mathbb{P}^2 \cap \Gamma \geq \# C \cap \Gamma = 7$. Отсюда получается противоречив с $\deg \Gamma = 7$ и невырожденностью Γ.

3) Если $\alpha = \deg C = 3$, то C содержится в гиперплоскости $\mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^4$ и $\beta \geq 10$. Но $7 = \# \mathbb{P}^3 \cap \Gamma \geq \# C \cap \Gamma = 10$. Противоречие.

4) Если $\alpha = \deg C = 4$, то $\beta \geq 13$. Аналогично случаю 3) получаем, что C не содержится в гиперплоскости, т. е. $C \subset \mathbb{P}^4$ – рациональная нормальная кривая. Тогда $h^0(I_C(2)) = 6$ и $h^0(I_{C \cup \Gamma}(2)) \geq 6 - 2 = 4$. Противоречие.

Случай $Y = \mathbb{P}^3$, $\deg \Gamma = 7$ и $p_a(\Gamma) = 3$ разбирается аналогично.

(ii) Предположим, что для неприводимого дивизора $D \sim \alpha(-K_{X^+}) - \beta F^+$ имеем $D \cdot (-K_{X^+})^2 \leq 0$. Тогда в случае $g = 9$ $12\alpha - 3\beta \leq 0$ и

$$D \sim \alpha(-K_{X^+}) - \beta F^+ \sim (4\alpha - 3\beta) H^* - (\alpha - \beta)\Gamma^+$$

Но $D \cdot L^* \geq 0$, поэтому $4\alpha \geq 3\beta \geq 12\alpha$. С другой стороны, $D \cdot (-K_{X^+}) \cdot F^+ = 3\alpha + 2\beta \geq 0$. Противоречие. Случаи $g = 10$ и 12 разбираются аналогично. Лемма доказана. $\square$

Лемма. *Если поверхность F неособа, то для любой кривой $C \subset X^+$ такой, что $-K_{X^+} \cdot C = 0$ имеем $C \simeq \mathbb{P}^1$ и $N_{C/X^+} \simeq$*

$\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$. *Кривая C является прообразом 2- 3- и 4-секущей кривой Γ в случаях $d = 5$, 4 и 3 соответственно.*

Предложение. *Морфизм $\sigma\colon X' \to X$ стягивает дивизор F' на кривую $Z \subset X$, многообразие X является гладким многообразием Фано индекса 1 рода $g = 12$ при $Y = Y_5$, $g = 10$ при $Y = Y_2$ и $g = 9$ при $Y = \mathbb{P}^3$. Кривая Z является прямой на X.*

Доказательство. Согласно классификации экстремальных лучей, возможны следующие случаи:

1) $\dim X = 1$, $X \simeq \mathbb{P}^1$ и $\sigma\colon X' \to \mathbb{P}^1$ – расслоение на поверхности Дель Пеццо. Пусть $\sigma^*\left(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(1)\right) \sim \alpha(-K_{X'}) + \beta F'$, тогда

$$0 = \left(\alpha(-K_{X'}) + \beta F'\right)^2 \cdot (-K_{X'}) = (2g-6)\alpha^2 + 6\alpha\beta - 2\beta^2.$$

При каждом $g = 9$, 10 и 12 уравнение не имеет решений в целых α и β. Случай 1) невозможен.

2) $\dim X = 2$, $X \simeq \mathbb{P}^2$ и $\sigma\colon X' \to \mathbb{P}^2$ – расслоение на коники. Пусть $\sigma^*\left(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(1)\right) \sim D \sim \alpha(-K_{X'}) + \beta F'$, тогда $2\operatorname{Pic} X'$ порожден $-K_{X'}$ и D, следовательно, $\beta = -1$ или -2. Имеем

$$2 = (-K_{X'}) \cdot D^2 = (2g-6)\alpha^2 + 6\alpha\beta - 2\beta^2.$$

При $\beta = -2$ получаем уравнение $(g-3)\alpha^2 - 6\alpha - 5 = 0$, не имеющее целочисленными корней при $g = 9$, 10 и 12. При $\beta = -1$ получаем уравнение $(g-3)\alpha^2 - 3\alpha - 2 = 0$, также не имеющее целочисленными корней. Случай 2) невозможен.

3) $\dim X = 3$ и $\sigma\colon X' \to X$ – стягивание дивизора $D \sim \alpha(-K_{X'}) - \beta F'$ в точку (возможно особую). Тогда

$$(-K_{X'}) \cdot D^2 = (2g-6)\alpha^2 - 6\alpha\beta - 2\beta^2 = -2$$

и

$$(-K_{X'})^2 \cdot D = (2g-6)\alpha - 3\beta = 4, \quad 2 \quad \text{или} \quad 1.$$

(в зависимости от типа особенности). Из второго уравнения видно, что случаи $g = 9$ и 12 невозможны (правая часть не делится на 3). Если $g = 10$, то

$$7\alpha^2 - 3\alpha\beta - \beta^2 + 1 = 0 \quad \text{и} \quad 14\alpha - 3\beta = 4, \quad 2, \quad \text{или} \quad 1.$$

Система последних двух уравнений не имеет решений в целых α и β. Случай 3) невозможен.

4) $\dim X = 3$ и $\sigma\colon X' \to X$ – стягивание дивизора $D \sim \alpha(-K_{X'}) - \beta F'$ на гладкую кривую Z. В этом случае $\operatorname{Pic} X \simeq \mathbb{Z}$ и X – гладкое многообразие Фано индекса $r = 1$, 2, 3 или 4. Группа $\operatorname{Pic} X'$ порождается $D \sim \alpha(-K_{X'}) - \beta F'$ и

$$-\frac{1}{r}\sigma^* K_X = -\frac{1}{r}(-K_{X'} + D) = \frac{\alpha+1}{r}(-K_{X'}) - \frac{\beta}{r}F'.$$

Отсюда получаем, что $\beta = r$ или $\beta = -r$ и r делит $\alpha + 1$.

Пусть сначала $\beta = r$, $\alpha = rk - 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$r^3 \deg X = (-K_X)^3 = (-K_{X'}) \cdot (-K_{X'} + D)^2 =$$
$$(-K_{X'}) \cdot (rk(-K_{X'}) - rF')^2 = 2r^2((g-3)k^2 - 3k - 1)$$

или

$$(g-3)k^2 - 3k - \frac{1}{2} r \deg X - 1 = 0. \qquad (1)$$

Дискриминант этого уравнения (относительно k) равен $\Delta = 9 + (g-3)(2r\deg X + 4)$. Воспользуемся классификацией многообразий Фано с $\operatorname{Pic} X = \mathbb{Z}$, (см. [?]).

а) $r = 4$, $\deg X = 1$, $X \simeq \mathbb{P}^3$. Дискриминант $\Delta = 3(4g-9)$ является квадратом только при $g = 9$. В этом случае $k = 1$, $D \sim 3(-K_{X'}) - 4F' \sim \chi(\Gamma^+)$. По определению χ

$$F' \cdot E_i' > 0, \quad (-K_{X'}) \cdot E_i' = 0, \quad \chi(\Gamma^+) \cdot E_i' = -4F' \cdot E_i' < 0.$$

С другой стороны,

$$0 = E_i' \cdot (-K_{X'}) = E_i' \cdot \sigma^*(-K_X) - E_i' \cdot \chi(\Gamma^+) = 4 \deg \sigma(E_i') - E_i' \cdot \chi(\Gamma^+),$$

откуда $E_i' \cdot \chi(\Gamma^+) \geq 0$, т. е. множества E' и E^+ пусты и $X' = X^+$. Но на иррациональной линейчатой поверхности существует лишь одна структура расслоения на $\mathbb{P}^1$, поэтому экстремальной Рациональной кривой является слой f_Γ и $\sigma = \varphi$. Противоречие с выбором экстремального луча. Случай а) невозможен.

б) $r = 3$, $\deg X = 2$. Дискриминант $\Delta = 16g - 39$, является квадратом только при $g = 10$. В этом случае $k = 1$,

$$D \sim 2(-K_{X'}) - 3F' \sim \chi(\Gamma^+).$$

Аналогично а) получается противоречие.

в) $r = 2$, $\deg X = d$, $1 \leq d \leq 5$. Дискриминант уравнения равен $\Delta = 9 + 4(g-3)(d+1)$. Уравнение (1) имеет вид

$$(g-3)k^2 - 3k - (d+1) = 0.$$

Если $g = 9$, то $d+1$ делится на 3 и, следовательно, $d = 2$ или $d = 5$. Дискриминант Δ является квадратом только в случае $d = 2$, тогда $k = 1$,

$$D \sim -K_{X'} - 2F' \sim \chi(-2H^* + \Gamma^+).$$

Дивизор D не является эффективным.

Если $g = 10$, то Δ не является квадратом при $d = 1, \ldots, 5$. Наконец, если $g = 12$, то $d = 2$ или 5. Дискриминант $\Delta = 9(1+4(d+1))$ является квадратом только при $d = 5$, тогда $k = 1$ и $D \sim \chi(\Gamma^+)$. Аналогично а) и б) получаем противоречие.

с) $r = 1$, $\deg X = 2g(X) - 2$, $2 \leq g(X) \leq 12$, $g(X) \neq 11$. Уравнение (1) имеет вид

$$(g-3)k^2 - 3k - g(X) = 0$$

и $\Delta = 9 + 4(g-3)g(X)$. Если $g = 9$, то $g(X) = 3$, 6, 9 или 12. Дискриминант Δ является квадратом $g(X) = 3$, $k = 1$, $D \sim -F'$ и при $g = 9$, $k = -1$, $D \sim -2K_{X'} - F'$. В каждом случае дивизор D не является эффективным. Если $g = 10$, то $\Delta = 4 + 28g(X) \leq 400$, откуда, $k \leq \frac{1}{14}(3 + 20)$ и $k \leq 1$ (т. к. является целым). Поэтому $\alpha = rk - 1 \leq 0$ и дивизор D не является эффективным. Если $g = 12$, то $\Delta = 9+36g(X) \leq 441$, откуда $k \leq \frac{1}{18}(3+21)$, $k \leq 1$ и дивизор D неэффективен. Случай $\beta = r$ невозможен.

Остался возможным только случай $\beta = -r$. Так как $D \sim -\alpha K_{X'} + rF'$ неподвижен и неприводим, то $\alpha = 0$, $r = 1$, т. е. $D = F'$, $\sigma\colon X' \to X$ – стягивание F' на гладкую кривую Z и X – многообразие Фано индекса 1. Имеем

$$\deg X = 2g(X) - 2 = (-K_X)^3 = (-K_{X'}) \cdot (-K_{X'} + F')^2 = \\ (-K_{X'})^3 + 2F' \cdot (-K_{X'})^2 + (-K_{X'}) \cdot F'^2 = \\ 2g - 6 + 6 - 2 = 2g - 2,$$

т. е. $g(X) = g$ Многообразие X имеет род g. Далее

$$\deg Z = -K_X \cdot Z = (-K_{X'} + F') \cdot F' \cdot (-K_{X'}) = 3 - 2 = 1,$$

т. е. $Z \subset X$ – прямая. Предложение доказано. □

Таким образом, имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} Z' \arrow[d] & X' \arrow[d, "\sigma"'] & X^+ \arrow[l, dashed, "\chi"'] \arrow[d, "\varphi"] & \Gamma^+ \arrow[d] \\ Z & X & Y \arrow[l, dashed, "\psi"'] & \Gamma \end{tikzcd} \tag{2}$$

где $\sigma \circ \chi \circ \varphi^{-1} = \psi$ – бирациональное отображение. Легко видеть, что

$$\sigma^*(-K_X) = -K_{X'} + F', \qquad \chi^*\sigma^*(-K_X) = -K_{X^+} + F^+,$$

$$
\begin{aligned}
\psi^*(-K_X) = \varphi_*\chi^*\sigma^*(-K_X) = \\
&= \varphi_*(-K_{X^+} + F^+) = \\
&= \begin{cases} \varphi_*(7H^* - 2\Gamma^+) & \text{при} \quad g = 9, \\ \varphi_*(5H^* - 2\Gamma^+) & \text{при} \quad g = 10, \\ \varphi_*(3H^* - 2\Gamma^+) & \text{при} \quad g = 12, \end{cases}
\end{aligned}
$$

Откуда получаем (i)–(iii) теоремы. Для доказательства (iv) сравним диаграммы. Отображение ψ является обратным к двойной проекции φ_{2Z}. Поэтому достаточно доказать, что в диаграмме при $g = 9$ кривая Γ не может быть гиперэллиптической. Действительно, линейные системы $|-K_{X'}|$ и $|-K_{X^+}|$ не имеют базисных точек и, следовательно, $-K_{X^+}$ численно эффективен. Кривая Γ – негиперэллиптические при $g = 9$. Теорема доказана полностью. $\square$

Следствие. *Существует ровно 4 типа трехмерных многообразий Фано с $H^3(X, \mathbb{Z}) = 0$:*

$$\mathbb{P}^3, \quad Q_2 \subset \mathbb{P}^4, \quad X_5 \subset \mathbb{P}^6, \quad X_{22} \subset \mathbb{P}^{13}.$$

9 Проективные модели трехмерных многообразий Фано

Лемма. *Пусть D – эффективный дивизор на поверхности S типа K3, тогда*

- $\dim |D| = \frac{1}{2}D^2 + 1$;
- $D^2 = 2p_a(D) - 2$, *в частности,* $D^2 \geq -2$ *для любой неприводимой кривой* D *и* $D^2 = -2$, *если и только если* D *– неособая рациональная кривая;*
- *предположим, что линейная система* $|D|$ *не имеет неподвижных компонент, тогда либо*
  - $D^2 > 0$ *и общий элемент из* $|D|$ *является неприводимой кривой; в этом случае* $H^1(S, D) = 0$;
  - *либо* $D^2 = 0$ *и* $D \sim mE$, *где* $n \geq 1$ *– некоторое целое число,* E *– эллиптическая кривая – слой эллиптического пучка* $|E|$ *на* S;
- *если* D *– неприводимая кривая, то линейная система* $|D|$ *не имеет базисных точек;*
- *для любой кривой* D *полная линейная система* $|D|$ *не имеет базисных точек вне неподвижных компонент.*

Теорема. *Пусть X – трехмерное многообразие Фано. Тогда линейная система $|-K_X|$ не имеет базисных точек.*

Доказательство. Пусть $S \in |-K_X|$ – неособая поверхность типа K3. Дивизор $L := -K_X|_S$ обилен на S. Так как $H^1(X, \mathscr{O}_X) = 0$, то последовательность

$$H^0(X, -K_X) \longrightarrow H^0(S, L) \longrightarrow 0$$

точна. Поэтому любая базисная кривая линейной системы $|-K_X|$ является неподвижной компонентой системы $|L|$ на S и, обратно, каждая неподвижная компонента $|L|$ является базисной кривой в $|-K_X|$. Если в $|-K_X|$ нет базисных кривых, то базисные точки линейной системы $|-K_X|$ и только они являются базисными точками линейной системы $|L|$.

Известно, что для любого обильного дивизора L на поверхности S типа K3 линейная система $|L|$ не имеет базисных точек, если она не имеет неподвижных компонент. Линейная система $|L|$ может иметь неподвижные компоненты только, если $L = Z + mY$, где Z – неособая рациональная кривая, Y – слой эллиптического пучка Y на S, $Z \cdot Y = 1$ и $m \geq 3$ целое число.

Таким образом, линейная система $|S|$ имеет одну единственную базисную кривую Z. Так как $Z^2 = -2$ на K3-поверхности S, то $-K_X^3 = 2m - 2$ и $\dim |-K_X| = m + 1$. Антиканоническое отображение $\phi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^{m+1}$ не определено только в Z и его образом X является некоторая поверхность W, $\deg W = m$.

Действительно, ограничение ϕ на S является морфизмом, определяемым линейной системой $|mY|$. Линейная система $|mY|$ составлена из эллиптического пучка $|Y|$ и, как легко проверить, отображает S на нормальную рациональную кривую степени m в $\mathbb{P}^m$. Но эта кривая есть не что иное, как сечение $W \subset \mathbb{P}^{m+1}$ гиперплоскостью, соответствующей дивизору S.

Пусть $\sigma : \tilde{X} \to X$ – раздутие кривой Z, E – исключительный дивизор. Обозначим через Σ_E исключительное сечение рациональной линейчатой поверхности E, а через $F_E E$ – ее слой. Пусть $\tilde{S}$ и $\tilde{Y}$ – собственные прообразы S и Y, $\tilde{\varphi} := \varphi \circ \sigma$. Справедливы следующие утверждения.

(1) $\tilde{\varphi} : \tilde{X} \to W$ является морфизмом. Действительно, отображение $\tilde{\varphi}$ задается линейной системой $|\tilde{S}| = |\sigma^* S - E|$, которая не имеет базисных точек, поскольку кривая Z является схемным пересечением всех дивизоров из $|S|$.

(2) $K_{\tilde{X}} = -\tilde{S}$.

(3) Общий слой морфизма $\tilde{\varphi}$ является геометрически неприводимой гладкой эллиптической кривой.

(4) Ограничение $\tilde{\varphi}$ на E является бирациональным морфизмом, переводящим слои линейчатой поверхности E в прямые на W, т. е. W – либо неособая линейчатая поверхность, либо конус над рациональной нормальной кривой. Поскольку $\mathrm{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, имеет место только второй случай. $\square$

Список литературы

[1] *Исковских В. А.* Антиканонические модели трехмерных алгебраических многообразий // *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат.* — 1979. — Т. 12. — С. 59–157.

[2] *Исковских В. А.* Лекции по трехмерным алгебраическим многообразиям. Многообразия Фано. — Изд-во МГУ, 1988.

[3] *Kollár J.* Rational curves on algebraic varieties. — Berlin: Springer-Verlag, 1996. — Vol. 32 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics].* — Pp. viii+320.

[4] *Iskovskikh V. A., Prokhorov Y.* Fano varieties. Algebraic geometry. V. — Berlin: Springer, 1999. — Vol. 47 of *Encyclopaedia Math. Sci.*

[5] *Прохоров Ю. Г.* Особенности алгебраических многообразий. — Москва: МЦНМО, 2009. — С. 128.