2010/2011 учебный год, осень
Многообразия Фано
Задачи

(1) Найти все поверхности дель Пеццо, являющиеся полными пересечениями гиперповерхностей в грассманианах.
(2) Найти все поверхности дель Пеццо, являющиеся полными пересечениями во взвешенных проективных пространствах.
(3) Докажите, что раздутие точки на $\mathbb{P}^n$ является многообразием Фано. Когда раздутие $m \geq 2$ точек на $\mathbb{P}^n$ является многообразием Фано?
(4) Пусть X – проективная поверхность и пусть $C \subset X$ – обильный эффективный дивизор такой, что $p_a(C) \leq 1$. Докажите, что X – поверхность дель Пеццо.
(5) Пусть $\mathscr{E} = \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(d_i)$. Когда $\mathbb{P}(\mathscr{E})$ является многообразием Фано?
(6) Пусть X – многообразие Фано и пусть g – его автоморфизм конечного порядка. Докажите, что g имеет неподвижную точку.
(7) Пусть X – проективное многообразие, содержащее открытое подмножество $U \simeq \mathbb{A}^n$ такое, что $X \setminus U$ – неприводимо. Докажите, что X – многообразие Фано. Приведите примеры.
(8) Докажите, что раздутие прямой на $\mathbb{P}^n$ является многообразием Фано.
(9) Когда раздутие неособой кривой на $\mathbb{P}^3$ является многообразием Фано?
(10) Найти все поверхности дель Пеццо и трехмерные многообразия Фано, являющиеся полными пересечениями гиперповерхностей в произведении проективных пространств $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_l}$.
(11) Пусть произведение $X \times Y$ является многообразием Фано. Докажите, что таковыми являются X и Y.
(12) Докажите, что многообразие полных флагов на $\mathbb{P}^2$ является многообразием Фано. Найдите его степень. Вычислите группу Пикара.
(13) Пусть X – поверхность дель Пеццо и пусть D – численно эффективный дивизор на X. Докажите, что или $D \sim 0$ или линейная система $|D|$ содержит неособую кривую.
(14) Пусть $X = X_3 \subset \mathbb{P}^4$ – неособая поверхность степени 3. Докажите, что X – поверхность дель Пеццо.
(15) Пусть X – многообразие Фано индекса $\dim X + 1$ (соотв. $\dim X$). Докажите, что $X \simeq \mathbb{P}^n$ (соотв. $X = X_2 \subset \mathbb{P}^{n+1}$ – квадрика).
(16) Пусть X – неособая проективная поверхность такая, что $-K_X$ численно эффективен. Докажите, что имеет место одно из следующих:
    (a) $K_X \equiv 0$ (численно тривиален);
    (b) X рациональна;
    (c) X бирационально изоморфно линейчатой поверхности над эллиптической кривой.
(17) Обобщить теорему о существовании неособой кривой в $|-K_X|$ для почти поверхности дель Пеццо X (т.е. $-K_X$ численно эффективен и объемен).
(18) Пусть $F = F_d$ – поверхность дель Пеццо степени d. Предположим, что на F действует инволюция так, что неподвижные точки образуют конечное множество. Докажите, что d четно.

(19) Опишите неособые поверхности $X \subset \mathbb{P}^n$ такие, что общее гиперплоское сечение $X \cap \mathbb{P}^{n-1}$ является эллиптической кривой. Какова может быть степень такой поверхности?

(20) Докажите, что гладкая квартика $X_4 \subset \mathbb{P}^4$ содержит одномерное семейство прямых.

(21) Пусть X – поверхность дель Пеццо степени $1 < d < 8$ и пусть D – эффективный дивизор на X. Докажите, что имеет место разложение $D \sim \sum n_i C_i$, где C_i – (-1)-кривые, а n_i – целые неотрицательные числа. Верно ли то же самое для поверхностей дель Пеццо степени 1?

(22) Пусть X – трехмерное многообразие Фано и пусть $f : X \to Z$ – гладкий морфизм на поверхность. Докажите, что Z – поверхность дель Пеццо. (*Указание.* Можно пользоваться теоремой о неособом дивизоре.)

(23) Пусть X – трехмерное многообразие Фано и пусть $f : X \to Z$ – морфизм на поверхность. Докажите, что Z рациональна.

(24) Пусть X – поверхность дель Пеццо степени $1 < d < 8$ и пусть D – эффективный дивизор на X. Докажите, что имеет место разложение $D \sim \sum n_i C_i$, где C_i – (-1)-кривые, а n_i целые неотрицательные числа. Верно ли то же самое для поверхностей дель Пеццо степени 1?

(25) Пусть X – трехмерное многообразие Фано индекса 2 степени 6 с $\operatorname{Pic} X \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Докажите, что X изоморфно многообразию полных флагов на $\mathbb{P}^2$.

(26) Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ – неособое многообразие степени d. Предположим, что $d = N - \dim X + 2$ и $X \subset \mathbb{P}^N$ проективно нормально. Докажите, что X – многообразие Фано индекса $\geq \dim X - 1$.

(27) Пусть X – трехмерное многообразие Фано индекса 2 степени 6 с $\operatorname{Pic} X \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Докажите, что X изоморфно $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^2}(T_{\mathbb{P}^2})$.

(28) Докажите, что $X_5 \subset \mathbb{P}^6$ является компактификацией $\mathbb{C}^3$.

(29) Докажите, что $X_3 \subset \mathbb{P}^4$ не является компактификацией $\mathbb{C}^3$.

(30) Докажите, что $X_4 \subset \mathbb{P}^5$ не является компактификацией $\mathbb{C}^3$.

(31) Найдите число параметров, параметризующих $X_{22} \subset \mathbb{P}^{13}$.

(32) Докажите, что неособая гиперэллиптическая кривая $Y \subset \mathbb{P}^3$, $\deg Y = 7$, $p_a(Y) = 3$ имеет 5-секущую.

(33) Пусть $X = X_4 \subset \mathbb{P}^5$ – пересечение двух квадрик. Пусть $L \subset X$ – прямая и пусть $f : \tilde{X} \to X$ – ее раздутие. Каков тип второго экстремального стягтвания на $\tilde{X}$?

(34) Пусть $X = X_3 \subset \mathbb{P}^4$ – кубика. Пусть $L \subset X$ – прямая и пусть $f : \tilde{X} \to X$ – ее раздутие. Каков тип второго экстремального стягтвания на $\tilde{X}$?