Эллиптические кривые в криптографии
Обязательные задачи
Осенний семестр 2012/2013 учебного года

(1) При каком a кривая, заданная уравнением $x^3 + y^3 + z^3 + axyz = 0$ в $\mathbb{P}^2$, приводима?

(2) При каком a кривая, заданная уравнением $x^3+y^3+z^3+axyz = 0$ в $\mathbb{P}^2$, особа?

(3) Найдите все особые точки кривой, заданной уравнением $y^4 - xz^3 - 4xyz^2 - 2xy^2z + x^2z^2 = 0$ в $\mathbb{P}^2$.

(4) Найдите координаты всех точек перегиба кубической кривой Ферма $x^3+y^3+z^3 = 0$.

(5) Найдите точки перегиба кривой $x^2y + y^2z + z^2x = 0$ (характеристика – произвольная).

(6) Найдите координаты всех точек перегиба кубической кривой $x^3 + y^3 + z^3 + axyz = 0$.

(7) Найдите нормальную форму Вейерштрасса кубической кривой Ферма $x^3 + y^3 + z^3 = 0$.

(8) Вычислите j-инвариант кривой Ферма $x^3 + y^3 + z^3 = 0$.

(9) Постройте эллиптическую кривую с j-инвариантом $j = 7$.

(10) Выбрав в качестве нейтрального элемента точку $(0 : 1 : 0)$, на кривой $y^2+y = x^3 - x$ найти nP для $P = (0, 0)$ и любого n.

(11) Найдите все точки порядка 2 на кривой $y^2 = x^3 + x$.

(12) Найдите все точки порядка 3 на кривой $y^2 - x^3 + 2 = 0$ над полем $\mathbb{F}_{47}$.

(13) Выписать явные формулы для группового закона на эллиптической кривой $y^2 + y = x^3$ над полем характеристики 2 (в качестве нейтрального элемента возьмите бесконечную точку).

(14) Сколько существует точек порядка 3 на эллиптической кривой $y^2 + y = x^3$ над полем $\mathbb{F}_q$ для $q = 2, 4, 5, 7, 8$?

(15) Воспользуйтесь групповым законом и постройте семейство рациональных решений уравнения $y^2 = x^3 + x - 1$.

(16) Найдите порядок точки $P = (0, 4)$ на эллиптической кривой $y^2 = x^3 + 16$.

(17) Найдите порядок точки $P = (0, 1)$ на эллиптической кривой $y^2 = x^3 + x + 1$ над полем $\mathbb{F}_3$.

(18) Найдите порядок точки $P = (2, 3)$ на эллиптической кривой $y^2 = x^3 + 1$ над полем $\mathbb{F}_5$.

(19) Опишите точки порядка 3 на эллиптической кривой $y^2 = x^3 + cx^2 + ax + b$ над полем характеристики 3.

(20) Как можно выразить $\wp''$ через $\wp$?

(21) Сколько имеется точек порядка n на эллиптической кривой над $\mathbb{C}$?

(22) Найдите порядок точки $P = (2, 1)$ на эллиптической кривой $y^2 = x^3 + x + 1$ над полем характеристики 5.

(23) Найдите порядок точки $P = (2, 1)$ на эллиптической кривой $y^2 = x^3 + x$ над полем характеристики 3.

(24) Найдите порядок точки $P = (2, 2)$ на эллиптической кривой $y^2 = x^3 + 1$ над полем характеристики 5.

(25) Существует ли на проективной плоскости конечное множество точек, удовлетворяющих следующему условию: прямая, проходящая через две из них проходит еще ровно через одну из них?

(26) Найдите все $\mathbb{F}_4$-точки эллиптической кривой $y^2 + y = x^3$.

(27) Найдите порядок точки $P = (0, 1)$ на эллиптической кривой $y^2 + y = x^3$ над полем характеристики 2.

(28) Найдите все $\mathbb{F}_4$-точки эллиптической кривой $y^2 + xy = x^3 + 1$.

(29) Найдите порядок точки $P = (1, 0)$ на эллиптической кривой $y^2 + xy = x^3 + 1$ над полем характеристики 2.

(30) Найдите порядок точки $P = (5, 2)$ на эллиптической кривой $y^2 = x^3 + x$ над полем характеристики 7.

(31) Найдите все точки порядка 2 на эллиптической кривой $y^2 = x^3 + x$ над полем характеристики 5.

(32) Найдите все точки порядка 4 на эллиптической кривой $y^2 = x^3 + x$ над полем характеристики 3.

(33) Пусть решетка Λ порождается элементами 1 и i. Найдите группу автоморфизмов эллиптической кривой $\mathbb{C}/\Lambda$. Ответ обоснуйте.

(34) Пусть решетка Λ порождается элементами 1 и $(-1+i\sqrt{3})/2$. Найдите группу автоморфизмов эллиптической кривой $\mathbb{C}/\Lambda$. Ответ обоснуйте.

(35) Пусть $X \subset \mathbb{A}^2$ – неприводимая кривая, заданная уравнением $f_{d-1}(x, y) + f_d(x, y) = 0$, где f_{d-1} и f_d – многочлены степеней $d - 1$ и d соответственно. Докажите, что X рациональна. Выпишите рациональную параметризацию.

(36) Докажите, что если многочлен $x^3 + ax + b$ имеет кратный корень, то кривая, заданная в $\mathbb{A}^2$ уравнением $y^2 = x^3 + ax + b$ рациональна. Выпишите рациональную параметризацию.

(37) Докажите, что кривая $y^3 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 3y^2 - 3y + 2$ рациональна. Выпишите рациональную параметризацию.