

Вопросы к коллоквиуму по линейной алгебре – весна 2025 года.

Лектор И.А. Чубаров.

1. Векторные пространства. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис, размерность. Примеры.
2. Матрица перехода от одного базиса к другому, ее свойства. Изменение координат вектора при замене базиса.
3. Векторные подпространства, равносильность двух способов их задания. Сумма и пересечение подпространств. Формула Грассмана.
4. Прямая сумма подпространств: определение и равносильные условия. Существование прямого дополнения к подпространству. Внешняя прямая сумма векторных пространств, превращение ее в прямую сумму подпространств.
5. Факторпространство, его размерность. Корамерность. Связь с решениями неоднородной системы линейных уравнений.
6. Линейные функции на векторном пространстве, их ядра. Изменение коэффициентов линейной формы при замене базиса. Сопряженное пространство V^* , дуальный базис. Канонический изоморфизм V и V^{**} .
7. Линейные отображения и операторы. Ядро и образ, связь их размерностей. Критерий инъективности. Существование и единственность линейного отображения, которое отображает базис первого пространства в произвольные векторы второго пространства.
8. Теорема об изоморфизме векторных пространств. Изоморфизм образа векторного пространства при линейном отображении и факторпространства по ядру.
9. Задание линейных отображений (операторов) матрицами. Изменение матрицы линейного отображения при переходе к другим базисам. Нахождение ядра и образа при помощи матрицы.
10. Линейные операторы. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. Подобные матрицы. Некоторые инварианты подобных матриц.
11. Векторное пространство линейных отображений. Алгебра линейных операторов. Изоморфизм алгебры матриц и алгебры линейных операторов.
12. Инвариантные подпространства линейного оператора. Ограничение линейного оператора на инвариантное подпространство. Вид матрицы линейного оператора при наличии инвариантного подпространства и инвариантного дополнения.
13. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Линейная независимость собственных векторов линейного оператора, отвечающих попарно различным собственным значениям.
14. Вычисление собственных значений и собственных векторов с помощью матрицы. Характеристический многочлен, его инвариантность. Выражения коэффициента при t^{n-1} и свободного члена через характеристические корни.
15. Собственные подпространства. Неравенство между размерностью собственного подпространства и кратностью корня характеристического многочлена.
16. Диагонализируемость (матрицы) линейного оператора. Критерии диагонализируемости и достаточное условие.
17. Аннулирующие многочлены линейного оператора (матрицы). Минимальный многочлен, его связь с характеристическим многочленом.
18. Теорема Гамильтона-Кэли.
19. Существование одномерного или двумерного инвариантного подпространства для линейного оператора в конечномерном пространстве над полем действительных чисел.

20. Корневые подпространства. Разложение пространства в прямую сумму корневых подпространств.
21. Жордановы клетки и матрицы, их характеристические и минимальные многочлены.
Жорданов базис.
22. Существование жорданова базиса для нильпотентного оператора (для матрицы с единственным собственным значением = характеристическим корнем).
23. Существование жордановой нормальной формы матрицы над полем, содержащим все корни характеристического многочлена.
24. Единственность жордановой нормальной формы. Критерий диагонализруемости в терминах минимального многочлена.
25. Билинейные функции и их матрицы. Изменение матрицы билинейной формы при замене базиса. Ранг билинейной функции. Симметрические билинейные функции.
26. Квадратичные формы и их матрицы. Восстановление симметрической билинейной функции по данной квадратичной функции. Диагональный вид квадратичной формы. Алгоритм Лагранжа.
- 27.* Нормальный (канонический) вид квадратичной формы над полями действительных и комплексных чисел. Закон инерции.
- 28.* Теорема Якоби.
- 29.* Знакоопределенные вещественные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

(Вопросы 27, 28, 29 необязательные, т.к. будут рассказаны в пятницу 28 марта)