

Программа спецкурса
«Алгебраическая геометрия и теория инвариантов»
2021/2022 уч. год. Лектор Д. А. Тимашёв

Алгебраические многообразия

- 1) Теорема Гильберта о базисе идеала. Нётеровы кольца.
- 2) Аффинные алгебраические многообразия, их идеалы, регулярные функции, морфизмы.
- 3) Двойственность между категориями аффинных многообразий и их координатных алгебр.
- 4) Целые и конечные расширения алгебр.
- 5) Лемма Нётер о нормализации.
- 6) Теорема Гильберта о нулях, её следствия.
- 7) Топология Зарисского, её нётеровость. Разложение на неприводимые компоненты.
- 8) Критерий неприводимости аффинного многообразия.
- 9) Главные открытые подмножества.
- 10) Рациональные функции и отображения.
- 11) Прямые произведения аффинных многообразий.
- 12) Замкнутые вложения и доминантные морфизмы (рациональные отображения), их алгебраическая характеристика.
- 13) Конечные морфизмы, их свойства.
- 14) Доминантные морфизмы: локальное разложение на конечный морфизм и проекцию, теорема об образе.
- 15) Размерность аффинных многообразий.
- 16) Теорема Крулля о размерности гиперповерхности.
- 17) Теорема о размерности слоёв морфизма.
- 18) Рациональные накрытия, степень накрытия. Бирациональные отображения.
- 19) Факторизация рациональных отображений.
- 20) Касательные пространства.
- 21) Дифференциалы морфизмов.
- 22) Гладкие и особые точки.
- 23) Касательное пространство к слою морфизма.
- 24) Структура вещественных и комплексных алгебраических многообразий с точки зрения дифференциальной геометрии.
- 25) Общее понятие алгебраического многообразия: пучки функций, аффинные атласы, морфизмы, прямые произведения.
- 26) Проективные многообразия. Прямое произведение проективных многообразий проективно.
- 27) Грассманианы и многообразия флагов.
- 28) Отделимые многообразия.
- 29) Полные многообразия.
- 30) Полнота проективных многообразий.
- 31) Нормальные многообразия. Теорема об устранении особенностей.
- 32) Дивизоры рациональных функций на нормальном многообразии.

Алгебраические группы

- 33) Алгебраические группы: определение и простейшие свойства. Связные компоненты алгебраической группы.
- 34) Алгебраичность группы, порождённой семейством неприводимых множеств. Коммутант алгебраической группы.
- 35) Гомоморфизмы алгебраических групп, ядро и образ. Действия алгебраических групп, свойства орбит и стабилизаторов.
- 36) Рациональные представления. Линеаризуемость алгебраических групп и их действий на аффинных многообразиях.
- 37) Однородные пространства, теорема Шевалле.

- 38) Факторгруппы алгебраических групп.
- 39) Касательная алгебра Ли.
- 40) Дифференциалы гомоморфизмов, функтор Ли. Касательные алгебры ядер, образов и прообразов при гомоморфизмах, пересечений алгебраических групп. Биекция между связными алгебраическими подгруппами и их касательными алгебрами Ли.
- 41) Связь между линейными представлениями алгебраических групп и их алгебр Ли. Присоединённое представление. Нормальные подгруппы и идеалы. Централизаторы и центр алгебраической группы.
- 42) Нильпотентные и унитарные операторы. Однопараметрические группы.
- 43) Алгебраические торы и квазиторы.
- 44) Алгебраическая группа, порождённая линейным оператором.
- 45) Разложение Жордана в алгебраической группе.
- 46) Разложение Жордана в касательной алгебре Ли.
- 47) Разрешимые группы: теорема Бореля о неподвижной точке, теорема Ли–Колчина.
- 48) Унитарные группы. Расщепление связной разрешимой группы.
- 49) Борелевские подгруппы, максимальные унитарные подгруппы и максимальные торы, их сопряжённость.
- 50) Разрешимый и унитарный радикалы. Полупростые группы и их касательные алгебры Ли.
- 51) Редуктивные группы.

Теория инвариантов

- 52) Геометрический фактор, примеры и необходимые условия существования.
- 53) Теорема Розенлихта о разделении орбит рациональными инвариантами.
- 54) Поле рациональных инвариантов, рациональный фактор. Существование геометрического фактора на открытом подмножестве многообразия по действию алгебраической группы.
- 55) Теорема Гильберта об инвариантах.
- 56) Категорный фактор аффинного многообразия по действию редуктивной группы, его свойства.
- 57) Факторизация аффинных многообразий по действиям конечных групп.
- 58) Классическая теория инвариантов: сведение инвариантов систем тензоров к инвариантам систем векторов и ковекторов. Прimitивные инварианты, их свойства.
- 59) Классическая теория инвариантов групп GL_n и SL_n . Инварианты системы линейных операторов.
- 60) Классическая теория инвариантов групп O_n , SO_n , и Sp_n .

Литература

- [1] Атья М., Макдональд И. Введение в коммутативную алгебру. М., Мир, 1972.
- [2] Винберг Э. Б., Онищик А.Л. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. М., Наука, 1988.
- [3] Винберг Э. Б., Попов В. Л. Теория инвариантов. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. т. 55. М., ВИНТИ, 1989.
- [4] Данилов В. Л. Алгебраические многообразия и схемы. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. т. 23. М., ВИНТИ, 1988.
- [5] Крафт Х. Геометрические методы в теории инвариантов. М., Мир, 1987.
- [6] Хамфри Дж. Линейные алгебраические группы. М., Наука, 1980.
- [7] Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии. т. 1. М., Наука, 1988.

Задачи по спецкурсу

- 1) Пусть $X = X_1 \cup \dots \cup X_n$ — топологическое пространство, причём индуцированная топология на подмножествах $X_i \subseteq X$ нётерова. Доказать, что X нётерово.
- 2) Разложить на неприводимые компоненты подмногообразие $X \subset \mathbb{A}^3$, заданное уравнениями $y^2 = xz, y^3 = z^2$.
- 3) Пусть $X \subseteq \mathbb{A}^3$ — аффинное подмногообразие, причём $\mathbb{I}(X) = (f_1, \dots, f_m) \triangleleft \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Доказать, что при каноническом вложении главного открытого подмножества $X_f \hookrightarrow \mathbb{A}^{n+1}$ выполнено $\mathbb{I}(X_f) = (f_1, \dots, f_m, 1 - x_n f)$.
- 4) Найти область определения рациональной функции $\frac{x_{11}x_{22}}{x_{12}x_{23}}$ на многообразии $(m \times n)$ -матриц ранга ≤ 1 .
- 5) Доказать, что многочлены $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ алгебраически независимы тогда и только тогда, когда ранг матрицы Якоби $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j}$ над полем $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$ равен m .
- 6) Найти подмногообразие особых точек многообразия вырожденных $(n \times n)$ -матриц.
- 7) Изоморфны ли многообразия $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ и \mathbb{P}^2 ?
- 8) Доказать, что пересечение двух открытых аффинных подмногообразий в отделимом многообразии является открытым аффинным подмногообразием.
- 9) Доказать, что если подгруппа алгебраической группы локально замкнута, то она замкнута.
- 10) Доказать, что алгебраическая группа SO_n связна.
- 11) Пусть на пространстве \mathbb{K}^n задана невырожденная кососимметрическая билинейная функция — кососкалярное умножение. Найти размерность многообразия k -мерных изотропных подпространств в \mathbb{K}^n .
- 12) Найти касательную алгебру Ли группы Sp_n матриц линейных операторов, сохраняющих кососимметрическую билинейную функцию на n -мерном пространстве с матрицей Ω , где $\omega_{ij} = 1$ при $i + j = n + 1, i < j, -1$ при $i + j = n + 1, i > j$, и 0 иначе.
- 13) Пусть $H \subset G$ — связная алгебраическая подгруппа. Доказать, что $\text{Lie } N_G(H) = \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$.
- 14) Доказать, что любая алгебраическая подгруппа и факторгруппа квазиторы — квазитор.
- 15) Найти борелевскую подгруппу, максимальный тор и максимальную унипотентную подгруппу в SO_n .
- 16) Пусть $G \subset Sp_n$ — нормализатор k -мерного изотропного подпространства. Найти $R_u(G)$.
- 17) Найти конечный набор порождающих поля рациональных инвариантов для действия группы B_m верхнетреугольных $(m \times m)$ -матриц на пространстве $\text{Mat}_{m,n}$ умножениями слева.
- 18) Найти конечный набор порождающих поля $\mathbb{K}(\mathbb{P}^1 \times \dots \times \mathbb{P}^1)^{PGL_2}$.
- 19) Доказать, что для действия \mathbb{G}_m на $\mathbb{A}^n \setminus \{0\}$ гомотетиями существует геометрический фактор $(\mathbb{A}^n \setminus \{0\})/\mathbb{G}_m \simeq \mathbb{P}^{n-1}$.
- 20) Группа \mathbb{G}_m действует на $\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$ по правилу: $t \circ (x, y) = (tx, t^{-1}y)$. Существует ли для этого действия геометрический фактор?
- 21) Доказать, что многообразие G/H смежных классов алгебраической группы по алгебраической подгруппе является геометрическим фактором для действия H на G умножениями справа.
- 22) Пусть редуктивная группа G линейно действует в пространстве A , которое является объединением конечномерных инвариантных подпространств, в каждом из которых G действует рациональным представлением. Доказать, что G -инвариантное дополнение A_G к подпространству A^G является линейной оболочкой векторов вида $gf - f$ ($g \in G, f \in A$).
- 23) Пусть $G \subset GL(V)$ — редуктивная линейная группа. Доказать, что категорный фактор $V//G$ является геометрическим тогда и только тогда, когда G конечна.
- 24) Пусть редуктивная группа G действует на неприводимом многообразии X с открытой орбитой и более чем одной неподвижной точкой. Доказать, что X неаффинно.
- 25) Найти конечный набор порождающих алгебры инвариантов пар линейных операторов на двумерном пространстве относительно группы GL_2 .
- 26) Найти конечный набор порождающих алгебры инвариантов троек (u, v, ω) , где u, v — векторы, а ω — кососимметрическая билинейная форма на n -мерном пространстве, относительно группы SL_n .

- 27) Найти конечный набор порождающих алгебры инвариантов пар (v, q) , где v — вектор, а q — квадратичная форма на n -мерном пространстве, относительно группы O_n .
- 28) Найти конечный набор порождающих алгебры инвариантов кососимметрических билинейных форм на $2n$ -мерном пространстве, относительно группы Sp_{2n} .