Программа спецкурса
«Алгебраическая геометрия и теория инвариантов»
2024/2025 уч. год. Лектор Д. А. Тимашёв

Алгебраические многообразия

1) Теорема Гильберта о базисе идеала. Нётеровы кольца.
2) Аффинные алгебраические многообразия, их идеалы, координатные алгебры, морфизмы.
3) Двойственность между категориями аффинных многообразий и их координатных алгебр.
4) Целые и конечные расширения алгебр.
5) Лемма Нётер о нормализации.
6) Теорема Гильберта о нулях, её следствия.
7) Топология Зарисского, её нётеровость. Разложение на неприводимые компоненты.
8) Алгебраический критерий неприводимости аффинного многообразия.
9) Главные открытые подмножества.
10) Регулярные функции.
11) Рациональные функции и отображения.
12) Прямые произведения аффинных многообразий.
13) Замкнутые вложения и доминантные морфизмы (рациональные отображения), их алгебраическая характеризация.
14) Конечные морфизмы, их свойства.
15) Доминантные морфизмы: локальное разложение на конечный морфизм и проекцию, теорема об образе.
16) Размерность аффинных многообразий.
17) Теорема Крулля о размерности гиперповерхности.
18) Теорема о размерности слоёв морфизма.
19) Рациональные накрытия, степень накрытия.
20) Бирациональные отображения. Факторизация рациональных отображений.
21) Касательные пространства.
22) Дифференциалы морфизмов.
23) Гладкие и особые точки.
24) Касательное пространство к слою морфизма.
25) Структура вещественных и комплексных алгебраических многообразий с точки зрения дифференциальной геометрии.
26) Общее понятие алгебраического многообразия: пучки функций, аффинные атласы, морфизмы, прямые произведения.
27) Проективные многообразия. Прямое произведение проективных многообразий проективно.
28) Грассманианы и многообразия флагов.
29) Отделимые многообразия.
30) Полные многообразия.
31) Полнота проективных многообразий.

Алгебраические группы

32) Алгебраические группы: определение и простейшие свойства. Связные компоненты алгебраической группы.
33) Алгебраичность группы, порождённой семейством неприводимых множеств. Коммутант алгебраической группы.
34) Гомоморфизмы алгебраических групп, ядро и образ. Действия алгебраических групп, свойства орбит и стабилизаторов.
35) Рациональные линейные представления. Линеаризуемость алгебраических групп и их действий на аффинных многообразиях.
36) Однородные многообразия, теорема Шевалле.
37) Факторгруппы алгебраических групп.

38) Касательная алгебра Ли.
39) Дифференциалы гомоморфизмов, функтор Ли. Касательные алгебры ядер, образов и прообразов при гомоморфизмах, пересечений алгебраических групп. Биекция между связными алгебраическими подгруппами и их касательными алгебрами Ли.
40) Связь между линейными представлениями алгебраических групп и их алгебр Ли. Присоединённое представление. Нормальные подгруппы и идеалы. Централизаторы и центр алгебраической группы.
41) Нильпотентные и унипотентные операторы. Однопараметрические группы.
42) Алгебраические торы и квазиторы.
43) Алгебраическая группа, порождённая линейным оператором.
44) Разложение Жордана в алгебраической группе.
45) Разложение Жордана в касательной алгебре Ли.
46) Разрешимые группы: теорема Бореля о неподвижной точке, теорема Ли–Колчина.
47) Унипотентные группы. Расщепление связной разрешимой группы.
48) Борелевские подгруппы, максимальные унипотентные подгруппы и максимальные торы, их сопряжённость.
49) Разрешимый и унипотентный радикалы. Полупростые группы и их касательные алгебры Ли.
50) Редуктивные группы.

Теория инвариантов

51) Геометрический фактор, примеры и необходимые условия существования.
52) График действия алгебраической группы, его свойства.
53) Теорема Розенлихта о разделении орбит рациональными инвариантами.
54) Поле рациональных инвариантов, рациональный фактор.
55) Теорема Гильберта об инвариантах.
56) Категорный фактор аффинного многообразия по действию редуктивной группы, его свойства.
57) Факторизация аффинных многообразий по действиям конечных групп.
58) Классическая теория инвариантов: сведение инвариантов систем тензоров к инвариантам систем векторов и ковекторов. Примитивные инварианты, их свойства.
59) Классическая теория инвариантов групп GL_n и SL_n. Инварианты системы линейных операторов.
60) Классическая теория инвариантов групп O_n, SO_n, и Sp_n.

Литература

[1] Атья М., Макдональд И. Введение в коммутативную алгебру. М., Мир, 1972.

[2] Винберг Э. Б., Онищик А.Л. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. М., Наука, 1988.

[3] Винберг Э. Б., Попов В. Л. Теория инвариантов. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. т. 55. М., ВИНИТИ, 1989.

[4] Данилов В. Л. Алгебраические многообразия и схемы. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. т. 23. М., ВИНИТИ, 1988.

[5] Крафт Х. Геометрические методы в теории инвариантов. М., Мир, 1987.

[6] Хамфри Дж. Линейные алгебраические группы. М., Наука, 1980.

[7] Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии. т. 1. М., Наука, 1988.

Задачи по спецкурсу

1) Пусть $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$ — топологическое пространство, причём индуцированная топология на подмножествах $X_i \subseteq X$ нётерова. Доказать, что X нётерово.
2) Разложить на неприводимые компоненты подмногообразие $X \subset \mathbb{A}^3$, заданное уравнениями $y^2 = xz$, $y^3 = z^2$.
3) Пусть $X \subseteq \mathbb{A}^3$ — аффинное подмногообразие, причём $\mathbb{I}(X) = (f_1, \ldots, f_m) \lhd \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Доказать, что при каноническом вложении главного открытого подмножества $X_f \hookrightarrow \mathbb{A}^{n+1}$ выполнено $\mathbb{I}(X_f) = (f_1, \ldots, f_m, 1 - x_n f)$.
4) Найти область определения рациональной функции $\frac{x_{11}x_{22}}{x_{12}x_{23}}$ на многообразии $(m \times n)$-матриц ранга ≤ 1.
5) Доказать, что многочлены $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ алгебраически независимы тогда и только тогда, когда ранг матрицы Якоби $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j}$ над полем $\mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)$ равен m.
6) Найти подмногообразие особых точек многообразия вырожденных $(n \times n)$-матриц.
7) Изоморфны ли многообразия $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ и $\mathbb{P}^2$?
8) Доказать, что пересечение двух открытых аффинных подмногообразий в отделимом многообразии является открытым аффинным подмногообразием.
9) Доказать, что если подгруппа алгебраической группы локально замкнута, то она замкнута.
10) Доказать, что алгебраическая группа SO_n связна.
11) Пусть на пространстве $\mathbb{K}^n$ задана невырожденная кососимметрическая билинейная функция — кососкалярное умножение. Найти размерность многообразия k-мерных изотропных подпространств в $\mathbb{K}^n$.
12) Найти касательную алгебру Ли группы Sp_n матриц линейных операторов, сохраняющих кососимметрическую билинейную функцию на n-мерном пространстве с матрицей Ω, где $\omega_{ij} = 1$ при $i + j = n + 1$, $i < j$, -1 при $i + j = n + 1$, $i > j$, и 0 иначе.
13) Пусть $H \subset G$ — связная алгебраическая подгруппа. Доказать, что $\operatorname{Lie} N_G(H) = \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$.
14) Доказать, что любая алгебраическая подгруппа и факторгруппа квазитора — квазитор.
15) Найти борелевскую подгруппу, максимальный тор и максимальную унипотентную подгруппу в SO_n.
16) Пусть $G \subset Sp_n$ — нормализатор k-мерного изотропного подпространства. Найти $R_u(G)$.
17) Найти конечный набор порождающих поля рациональных инвариантов для действия группы B_m верхнетреугольных $(m \times m)$-матриц на пространстве $\mathrm{Mat}_{m,n}$ умножениями слева.
18) Найти конечный набор порождающих поля $\mathbb{K}(\mathbb{P}^1 \times \cdots \times \mathbb{P}^1)^{PGL_2}$.
19) Доказать, что для действия $\mathbb{G}_m$ на $\mathbb{A}^n \setminus \{0\}$ гомотетиями существует геометрический фактор $(\mathbb{A}^n \setminus \{0\})/\mathbb{G}_m \simeq \mathbb{P}^{n-1}$.
20) Группа $\mathbb{G}_m$ действует на $\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$ по правилу: $t \circ (x, y) = (tx, t^{-1}y)$. Существует ли для этого действия геометрический фактор?
21) Доказать, что многообразие G/H смежных классов алгебраической группы по алгебраической подгруппе является геометрическим фактором для действия H на G умножениями справа.
22) Пусть редуктивная группа G линейно действует в пространстве A, которое является объединением конечномерных инвариантных подпространств, в каждом из которых G действует рациональным представлением. Доказать, что G-инвариантное дополнение A_G к подпространству A^G является линейной оболочкой векторов вида $gf - f$ $(g \in G,\ f \in A)$.
23) Пусть $G \subset GL(V)$ — редуктивная линейная группа. Доказать, что категорный фактор $V /\!\!/ G$ является геометрическим тогда и только тогда, когда G конечна.
24) Пусть редуктивная группа G действует на неприводимом многообразии X с открытой орбитой и более чем одной неподвижной точкой. Доказать, что X неаффинно.
25) Найти конечный набор порождающих алгебры инвариантов пар линейных операторов на двумерном пространстве относительно группы GL_2.
26) Найти конечный набор порождающих алгебры инвариантов троек (u, v, ω), где u, v — векторы, а ω — кососимметрическая билинейная форма на n-мерном пространстве, относительно группы SL_n.

27) Найти конечный набор порождающих алгебры инвариантов пар (v, q), где v — вектор, а q — квадратичная форма на n-мерном пространстве, относительно группы O_n.
28) Найти конечный набор порождающих алгебры инвариантов кососимметрических билинейных форм на $2n$-мерном пространстве, относительно группы Sp_{2n}.