

Программа спецкурса
«Алгебраические группы и теория инвариантов»
2024/2025 уч. год, весенний семестр
Лектор Д. А. Тимашёв

1. Алгебраические группы: определение и простейшие свойства. Связные компоненты алгебраической группы.
2. Алгебраичность группы, порождённой семейством неприводимых множеств. Коммутант алгебраической группы.
3. Гомоморфизмы алгебраических групп, ядро и образ. Действия алгебраических групп, свойства орбит и стабилизаторов.
4. Рациональные линейные представления. Линеаризуемость алгебраических групп и их действий на аффинных многообразиях.
5. Однородные многообразия, теорема Шевалле.
6. Факторгруппы алгебраических групп.
7. Касательная алгебра Ли.
8. Дифференциалы гомоморфизмов, функтор Ли. Касательные алгебры ядер, образов и прообразов при гомоморфизмах, пересечений алгебраических групп. Биекция между связными алгебраическими подгруппами и их касательными алгебрами Ли.
9. Связь между линейными представлениями алгебраических групп и их алгебр Ли. Присоединённое представление. Нормальные подгруппы и идеалы. Централизаторы и центр алгебраической группы.
10. Нильпотентные и унитарные операторы. Однопараметрические группы.
11. Алгебраические торы и квазиторы.
12. Алгебраическая группа, порождённая линейным оператором.
13. Разложение Жордана в алгебраической группе.
14. Разложение Жордана в касательной алгебре Ли.
15. Разрешимые группы: теорема Бореля о неподвижной точке, теорема Ли–Колчина.
16. Унитарные группы. Расщепление связной разрешимой группы.
17. Борелевские подгруппы, максимальные унитарные подгруппы и максимальные торы, их сопряжённость.

18. Разрешимый и унипотентный радикалы. Полупростые группы и их касательные алгебры Ли.
19. Редуктивные группы.
20. Геометрический фактор, примеры и необходимые условия существования.
21. График действия алгебраической группы, его свойства.
22. Теорема Розенлихта о разделении орбит рациональными инвариантами.
23. Поле рациональных инвариантов, рациональный фактор.
24. Теорема Гильберта об инвариантах.
25. Категорный фактор аффинного многообразия по действию редуктивной группы, его свойства.
26. Факторизация аффинных многообразий по действиям конечных групп.
27. Классическая теория инвариантов: сведение инвариантов систем тензоров к инвариантам систем векторов и ковекторов. Примитивные инварианты, их свойства.
28. Классическая теория инвариантов групп GL_n и SL_n . Инварианты системы линейных операторов.
29. Классическая теория инвариантов групп O_n , SO_n , и Sp_n .

Литература

- [1] Винберг Э. Б., Онищик А.Л. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. М., Наука, 1988.
- [2] Винберг Э. Б., Попов В. Л. Теория инвариантов. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. т. 55. М., ВИНТИ, 1989.
- [3] Крафт Х. Геометрические методы в теории инвариантов. М., Мир, 1987.
- [4] Хамфри Дж. Линейные алгебраические группы. М., Наука, 1980.