

# Программа спецкурса “Алгебраическая геометрия и теория инвариантов”

2011/12 уч. год. Лектор Д. А. Тимашёв

## Алгебраические многообразия

- 1) Аффинные алгебраические многообразия: идеалы, регулярные функции, морфизмы. Двойственность между категориями аффинных многообразий и их координатных алгебр.
- 2) Теорема Гильберта о базисе идеала.
- 3) Целые и конечные расширения алгебр.
- 4) Лемма Нётер о нормализации.
- 5) Теорема Гильберта о нулях, её следствия.
- 6) Топология Зарисского, её нётеровость. Разложение на неприводимые компоненты.
- 7) Критерий неприводимости аффинного многообразия.
- 8) Главные открытые подмножества, структура аффинного многообразия на них.
- 9) Рациональные функции и отображения.
- 10) Прямые произведения аффинных многообразий.
- 11) Замкнутые вложения и доминантные морфизмы (рациональные отображения), их алгебраическая характеристика.
- 12) Конечные морфизмы, их свойства.
- 13) Структура доминантного морфизма: локальное разложение на конечный морфизм и проекцию, теорема об образе.
- 14) Размерность многообразия, основные свойства.
- 15) Теорема Крулля о размерности гиперповерхности.
- 16) Теорема о размерности слоёв морфизма.
- 17) Рациональные накрытия, степень накрытия. Бирациональные отображения.
- 18) Факторизация рациональных отображений.
- 19) Касательные пространства и дифференцирование.
- 20) Дифференциалы морфизмов: цепное правило, сюръективность в типичной точке.
- 21) Гладкие и особые точки. Гладкие точки комплексного (вещественного) алгебраического многообразия образуют аналитическое подмногообразие.
- 22) Касательное пространство к слою морфизма.
- 23) Общее понятие алгебраического многообразия: пучки функций, аффинные атласы, морфизмы, прямые произведения.
- 24) Проективные многообразия. Прямое произведение проективных многообразий проективно.
- 25) Грассманианы и многообразия флагов.
- 26) Отделимые и полные многообразия.
- 27) Полнота проективных многообразий.
- 28) Нормальные многообразия. Теорема об устранении особенностей.
- 29) Дивизоры рациональных функций на нормальном многообразии.

## Алгебраические группы

- 30) Алгебраические группы, подгруппы, прямые произведения.
- 31) Связные компоненты алгебраической группы.

- 32) Алгебраичность группы, порождённой семейством неприводимых множеств. Коммутант алгебраической группы.
- 33) Гомоморфизмы алгебраических групп, ядро и образ.
- 34) Действия алгебраических групп, свойства орбит и стабилизаторов.
- 35) Рациональные представления. Представление в алгебре регулярных функций. Ли-неаризуемость алгебраических групп и их действий на аффинных многообразиях.
- 36) Однородные пространства алгебраических групп, теорема Шевалле.
- 37) Факторгруппы алгебраических групп.
- 38) Касательная алгебра Ли.
- 39) Свойства функтора Ли.
- 40) Связь между линейными представлениями алгебраических групп и их алгебр Ли.
- 41) Присоединённое представление. Нормальные подгруппы и идеалы. Централизаторы и центр алгебраической группы.
- 42) Нильпотентные и унитарные операторы. Однопараметрические группы.
- 43) Алгебраические торы и квазиторы.
- 44) Разложение Жордана в алгебраической группе и её касательной алгебре.
- 45) Разрешимые группы: теорема Бореля о неподвижной точке, теорема Ли–Колчина.
- 46) Унитарные группы.
- 47) Расщепление связной разрешимой группы.
- 48) Борелевские подгруппы и максимальные торы, их сопряжённость.
- 49) Разрешимый и унитарный радикалы.
- 50) Редуктивные группы.

## Теория инвариантов

- 51) Геометрический фактор, примеры и необходимые условия существования.
- 52) Теорема Розенлихта о разделении орбит рациональными инвариантами.
- 53) Поле рациональных инвариантов, рациональный фактор. Существование геометрического фактора на открытом подмножестве.
- 54) Теорема Гильберта об инвариантах.
- 55) Категорный фактор аффинного многообразия по действию редуктивной группы. Свойства морфизма факторизации.
- 56) Инварианты и факторы для конечных групп.
- 57) Нуль-конус, его описание для линейных представлений торов.
- 58) Критерий Гильберта–Мамфорда.
- 59) Сравнение слоёв морфизма факторизации с нуль-конусом, асимптотические конусы.
- 60) Классическая теория инвариантов систем тензоров: поляризация, примитивные инварианты систем векторов и ковекторов.
- 61) Классическая теория инвариантов групп  $GL_n$  и  $SL_n$ . Инварианты системы линейных операторов.
- 62) Классическая теория инвариантов групп  $O_n$ ,  $SO_n$  и  $Sp_n$ .
- 63) Хорошие факторы по действиям редуктивных групп.
- 64) Полустабильные и стабильные точки проективного действия, фактор Мамфорда.