Домашнее задание №1

1. Пусть z — комплексный корень многочлена $x^3 + x^2 + 3x + 4$. Представить выражение

$$\frac{z^2 - 3z - 1}{(z^2 + 2z + 1)^2}$$

в виде многочлена наименьшей возможной степени от z.

2. Построить поле $\mathbb{F}_{27}$ как простое расширение поля $\mathbb{F}_3$ и найти в этой модели какой-нибудь порождающий элемент группы $\mathbb{F}_{27}^{\times}$ и какой-нибудь примитивный элемент, не порождающий группу $\mathbb{F}_{27}^{\times}$.

3. Найти минимальные многочлены:

   (a) числа $\sqrt{2 + \sqrt[3]{3}}$ над полем $\mathbb{Q}$;

   (b) числа $1 + \sqrt{2}$ над полем $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$;

   (c) элемента $a^2 + a + 1$ поля $\mathbb{F}_2(a|a^4 + a + 1 = 0)$ над полем $\mathbb{F}_2$.

4. Найти группу автоморфизмов расширения

   (a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \supset \mathbb{Q}$;

   (b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2 + \sqrt{3}}) \supset \mathbb{Q}$;

   (c) $\mathbb{Q}(\sqrt{2 + \sqrt[3]{3}}) \supset \mathbb{Q}$.

5. Доказать, что многочлен $f(x) = x^p - x - c$ над полем K характеристики $p > 0$ либо неприводим, либо разлагается на линейные множители.