Домашнее задание №10

1. Привести к нормальной форме Фробениуса линейный оператор, имеющий в исходном базисе матрицу:

   (a) $\begin{pmatrix} 6 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ над полем $\mathbb{Q}$;

   (b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ -6 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ над полем $\mathbb{Q}$;

   (c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ над полем $\mathbb{F}_2$.

2. Пусть $M = F/N$ — фактормодуль свободного модуля F с базисом $f_1, \ldots, f_n$ над кольцом главных идеалов A по подмодулю N, порождённому элементами $n_j = a_{1j}f_1 + \cdots + a_{nj}f_n$, $j = 1, \ldots, k$, и $u_1, \ldots, u_m \in A$ — инвариантные множители модуля M. Доказать, что произведение $u_1 \cdots u_r$ равно наибольшему общему делителю всех миноров порядка r матрицы (a_{ij}).

3. Сколько существует классов подобия линейных операторов

   (a) в 4-мерном векторном пространстве над полем $\mathbb{F}_2$;

   (b) в 3-мерном векторном пространстве над полем $\mathbb{F}_3$?

   К каким каноническим видам можно привести матрицы этих операторов?