Домашнее задание №11

1. Перечислить с точностью до изоморфизма все двумерные коммутативные ассоциативные алгебры над полем $\mathbb{R}$.

2. Пусть A — ассоциативная алгебра с единицей, и $\mathcal{R} : A \to \mathrm{L}(V)$ — её линейное представление. Доказать, что существует разложение в прямую сумму инвариантных подпространств $V = V_0 \oplus V_1$, для которого $\mathcal{R}|_{V_0}$ — нулевое представление (т.е. все операторы $\mathcal{R}(a)$ нулевые), а $\mathcal{R}|_{V_1}$ — представление алгебры с единицей (т.е. $\mathcal{R}(1)|_{V_1}$ — единичный оператор).

3. Доказать, что любая нильпотентная конечномерная ассоциативная алгебра A изоморфна подалгебре алгебры нильтреугольных матриц.

4. Доказать: $\mathrm{Rad}(A_1 \oplus \cdots \oplus A_s) = \mathrm{Rad}(A_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Rad}(A_s)$.

5. Доказать, что радикал коммутативной ассоциативной алгебры совпадает с множеством её нильпотентных элементов.

6. Доказать, что радикал конечномерной ассоциативной алгебры A с единицей совпадает с пересечением

   (a) всех максимальных левых идеалов;

   (b) всех максимальных правых идеалов;

   (c) ядер всех неприводимых представлений алгебры A (*указание*: доказать нильпотентность пересечения ядер J, найдя такое n, что $J^n = J^{n+1}$, и рассмотрев действие J на факторе J^n по наибольшему собственному подъидеалу).

7. Вычислить матрицу стандартного скалярного умножения алгебры $\mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$ в базисе $(1, i)$.