Домашнее задание №13

1. Пусть D — конечномерная алгебра с делением, и $A = \mathrm{Mat}_n(D)$. Доказать, что алгебра A центральна тогда и только тогда, когда D центральна.

2. Пусть A, B — простые конечномерные ассоциативные алгебры (с ненулевым умножением), причём A центральна. Доказать, что алгебра $A \otimes B$ проста и $Z(A \otimes B) = 1 \otimes Z(B) \simeq Z(B)$. В частности, если A, B центральны, то и $A \otimes B$ центральна.

3. Обосновать ассоциативность умножения в $\mathrm{Br}(K)$.

4. Пусть K — поле характеристики $\neq 2$. Доказать, что:

   (a) обобщённая алгебра кватернионов $D(K, \alpha, \beta)$ — центральная простая алгебра размерности 4 (а значит, либо алгебра с делением, либо изоморфна $\mathrm{Mat}_2(K)$);

   (b) $[D(K, \alpha, \beta)]$ — элемент порядка 2 в группе Брауэра $\mathrm{Br}(K)$;

   (c) $D(K, 1, 1) \simeq \mathrm{Mat}_2(K)$;

   (d) $D(K, \alpha, 1) \simeq \mathrm{Mat}_2(K)$.

   (e) Как выглядят кватернионное сопряжение и кватернионная норма в $\mathrm{Mat}_2(K)$?