**Домашнее задание №14**

1. Найти поле расщепления для обобщённой алгебры кватернионов $D(K, \alpha, \beta)$.

2. Пусть $D$ — центральная алгебра с делением над полем $K$, и $L$ — поле расщепления для $D$. Доказать, что $(L : K) \geqslant \deg D$.

3. Пусть $D$ — центральная алгебра с делением степени 2 над полем $K$ характеристики $\neq 2$. Доказать, что $D \simeq D(\alpha, \beta)$ для некоторых $\alpha, \beta \in K^\times$. (*Указание*: имитировать доказательство теоремы Фробениуса.)

4. Пусть $\varphi : G \to H$ — гомоморфизм конечных групп, который по линейности однозначно продолжается до гомоморфизма групповых алгебр $\widetilde{\varphi} : KG \to KH$. Доказать, что $\operatorname{Ker} \widetilde{\varphi}$ — левый (или правый) идеал в $KG$, порождённый всеми элементами вида $g - 1$, где $g \in \operatorname{Ker} \varphi$.

5. Пусть $G$ — конечная $p$-группа, и $K$ — поле характеристики $p$. Доказать, что $\operatorname{Rad}(KG)$ есть гиперплоскость в $KG$ с базисом из всех элементов вида $g - 1$ ($g \in G \setminus \{1\}$).

6. Пусть $KG = A_1 \oplus \cdots \oplus A_s$ — групповая алгебра конечной группы $G$ над алгебраически замкнутым полем $K$ характеристики, не делящей $|G|$ (возможно, нулевой), и $A_i \simeq \operatorname{Mat}_{n_i}(K)$ — простые двусторонние идеалы в ней, соответствующие неприводимым представлениям группы $G$ размерностей $n_i$ ($i = 1, \ldots, s$). Каким элементом групповой алгебры порождается одномерный идеал $A_i$, отвечающий одномерному представлению $\rho_i : G \to K^\times$?

7. В обозначениях задачи 6, найти все простые двусторонние идеалы $A_i$ в алгебре $KG$ и минимальные левые идеалы в $A_i$, в которых реализуются неприводимые представления группы $G$, для следующих групп:

   (a) $G = S_3$;

   (b) $G = Q_8$;

   (c) $G = D_5$.

8. Разложить групповую алгебру $\mathbb{Q}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ (где $p$ — простое число) в прямую сумму простых алгебр.