Домашнее задание №15

1. Доказать, что группа унитарных кватернионных матриц $U_n(\mathbb{H}) = \{g \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{H}) \mid g^* \cdot g = E\}$ (здесь $*$ обозначает эрмитово сопряжение кватернионных матриц) является вещественной группой Ли, найти её размерность и касательную алгебру Ли.

2. Пусть на n-мерном векторном пространстве V на полем $\mathbb{R}$ задана невырожденная симметрическая билинейная форма сигнатуры (p, q). Линейный оператор на V, сохраняющий форму β, называется *псевдоортогональным*. Псевдоортогональные операторы образуют подгруппу $O(V, \beta) \subset GL(V)$, называемую *псевдоортогональной группой*.

   (a) Задать псевдоортогональную группу матричным уравнением в ортонормированном базисе пространства V — соответствующая матричная группа обозначается $O_{p,q}(\mathbb{R})$.

   (b) Доказать, что $O_{p,q}(\mathbb{R})$ — группа Ли.

   (c) Найти размерность и касательную алгебру Ли группы $O_{p,q}(\mathbb{R})$.

3. Пусть на $2n$-мерном векторном пространстве V на полем $\mathbb{K}$ задана невырожденная кососимметрическая билинейная форма ω. Линейный оператор на V, сохраняющий форму ω, называется *симплектическим*. Симплектические операторы образуют подгруппу $Sp(V, \omega) \subset GL(V)$, называемую *симплектической группой*.

   (a) Задать симплектическую группу матричным уравнением в подходящем базисе пространства V — соответствующая матричная группа обозначается $Sp_{2n}(\mathbb{K})$.

   (b) Доказать, что $Sp_{2n}(\mathbb{K})$ — группа Ли.

   (c) Найти размерность и касательную алгебру Ли группы $Sp_{2n}(\mathbb{K})$.

4. Доказать, что группа Ли $GL_n(\mathbb{C})$ связна.

5. Найти компоненты связности группы Ли $GL_n(\mathbb{R})$.