Домашнее задание №16

1. Доказать, что $Sp_{2n}(\mathbb{K}) \subseteq SL_{2n}(\mathbb{K})$.

2. Вложить группу $GA_n(\mathbb{K})$ аффинных преобразований n-мерного аффинного пространства над полем $\mathbb{K}$ в $GL_{n+1}(\mathbb{K})$ в качестве подгруппы линейных преобразований, сохраняющих гиперплоскость $\{x_{n+1} = 1\}$, и доказать, что она является подгруппой Ли. Найти её размерность и касательную алгебру Ли.

3. (a) Пусть на пространстве $\mathbb{C}^n$ задано эрмитово скалярное умножение. Доказать, что его вещественная и мнимая части суть евклидово скалярное умножение и вещественная симплектическая форма на $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$.

   (b) Доказать, что $U_n(\mathbb{C})$ есть пересечение любых двух из трёх групп $GL_n(\mathbb{C})$, $O_{2n}(\mathbb{R})$, $Sp_{2n}(\mathbb{R})$, где ортогональная и симплектическая группы рассматриваются по отношению к вещественному скалярному умножению и симплектической форме из п. (a).

4. Доказать, что $U_n(\mathbb{H})$ есть пересечение любых двух из трёх групп $GL_n(\mathbb{H})$, $U_{2n}(\mathbb{C})$, $Sp_{2n}(\mathbb{C})$ при подходящем выборе эрмитова скалярного умножения и симплектической формы на $\mathbb{H}^n \simeq \mathbb{C}^{2n}$, согласованных между собой и со структурой правого векторного пространства над $\mathbb{H}$.

5. Доказать, связность следующих групп Ли:

   (a) $SL_n(\mathbb{K})$;

   (b) $Sp_{2n}(\mathbb{K})$;

   (c) $U_n(\mathbb{C})$;

   (d) $SU_n(\mathbb{C})$.

6. (a) Описать явно группу Ли $O_{1,1}(\mathbb{R})^\circ$.

   (b) Доказать, что группа Ли $O_{p,q}(\mathbb{R})^\circ$ состоит из псевдоортогональных матриц, у которых определитель и верхний левый угловой минор порядка p положительны.

   (c) Вычислить группу компонент связности $O_{p,q}(\mathbb{R})/O_{p,q}(\mathbb{R})^\circ$.