Домашнее задание №17

1. Найти касательное пространство T_gG к группе Ли $G \subset GL_n(\mathbb{K})$ в произвольной точке $g \in G$ (как оно связано с касательной алгеброй Ли $\mathfrak{g} = T_EG$?).

2. Доказать, что $U_1(\mathbb{H}) \simeq SU_2(\mathbb{C})$.

3. (a) Записать явно в кватернионных терминах евклидово скалярное умножение на $\mathbb{H}$, соответствующее положительно определённой квадратичной форме — кватернионной норме $N(q) = q\bar{q}$.
   (b) Доказать, что действие группы $U_1(\mathbb{H}) \times U_1(\mathbb{H})$ на пространстве $\mathbb{H}$ по правилу $(u_1, u_2) \cdot q = u_1 q u_2^{-1}$ сохраняет скалярное умножение из п. (a) и тем самым задаёт гомоморфизм групп Ли $R : U_1(\mathbb{H}) \times U_1(\mathbb{H}) \to O(\mathbb{H}) \simeq O_4(\mathbb{R})$.
   (c) Вычислить $dR : \mathfrak{u}_1(\mathbb{H}) \oplus \mathfrak{u}_1(\mathbb{H}) \to \mathfrak{o}(\mathbb{H}) \simeq \mathfrak{o}_4(\mathbb{R})$ и доказать, что это отображение — изоморфизм алгебр Ли.
   (d) Доказать, что $\operatorname{Im} R = SO_4(\mathbb{R})$, т.е. $R : U_1(\mathbb{H}) \times U_1(\mathbb{H}) \to SO_4(\mathbb{R})$ — накрытие.
   (e) Найти $\operatorname{Ker} R$.

4. (a) Доказать, что присоединённое действие группы Ли $U_1(\mathbb{H})$ на своей алгебре Ли $\mathfrak{u}_1(\mathbb{H}) = \mathbb{H}_{\mathrm{im}}$ (пространство чисто мнимых кватернионов) сохраняет скалярное умножение из задачи 3(a) и тем самым задаёт гомоморфизм групп Ли $\mathrm{Ad} : U_1(\mathbb{H}) \to O(\mathbb{H}_{\mathrm{im}}) \simeq O_3(\mathbb{R})$.
   (b) Доказать, что $dR : \mathfrak{u}_1(\mathbb{H}) \to \mathfrak{o}(\mathbb{H}_{\mathrm{im}}) \simeq \mathfrak{o}_3(\mathbb{R})$ — изоморфизм алгебр Ли.
   (c) Доказать, что $\mathrm{Ad} : U_1(\mathbb{H}) \to SO(\mathbb{H}_{\mathrm{im}}) \simeq SO_3(\mathbb{R})$ — двулистное накрытие (это ещё один способ построения двулистного накрытия $SU_2(\mathbb{C}) \to SO_3(\mathbb{R})$).

5. Перечислить с точностью до изоморфизма все двумерные алгебры Ли
   (a) над $\mathbb{C}$,
   (b) над $\mathbb{R}$,

   и указать соответствующие группы Ли.

6. *Группа Гейзенберга* $H_n(\mathbb{K})$ состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_n & z \\ & 1 & & & y_1 \\ & & \ddots & 0 & \vdots \\ & 0 & & 1 & y_n \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

   над полем $\mathbb{K}$. Найти алгебру Ли $\mathfrak{h}_n(\mathbb{K})$ и вычислить $\exp : \mathfrak{h}_n(\mathbb{K}) \to H_n(\mathbb{K})$.

7. Доказать, что экспоненциальное отображение $\exp : \mathfrak{g} \to G$
   (a) для $G = GL_n(\mathbb{C})$ сюръективно, но не инъективно;
   (b) для $G = SL_2(\mathbb{R})$ не сюръективно и не инъективно;
   (c) для группы $G = N_n(\mathbb{K})$ верхних унитреугольных матриц является диффеоморфизмом.