Домашнее задание №18

1. Вычислить $\exp : \mathfrak{g} \to G$ для группы Ли $G \subset GL_3(\mathbb{K})$, состоящей из невырожденных матриц вида
$$\begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & z & 1 \end{pmatrix}$$

2. Задаёт ли отображение $t \mapsto g(t)$ линейное представление группы Ли $\mathbb{R}$? Если да, то записать его в виде $g(t) = \exp(tA)$.

   (a) $g(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^t - 1 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$;

   (b) $g(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{1+e^t}{2} & \dfrac{1-e^t}{2} \\ \dfrac{1-e^t}{2} & \dfrac{1+e^t}{2} \end{pmatrix}$;

   (c) $g(t) = \begin{pmatrix} e^t & t \\ -t & e^{-t} \end{pmatrix}$.

3. Рассмотрим гомоморфизм групп Ли $\varphi : U_1(\mathbb{C}) \to U_1(\mathbb{C})^n$, заданный формулой
$$\varphi(e^{it}) = (e^{i\alpha_1 t}, \ldots, e^{i\alpha_n t}),$$
где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — ненулевые вещественные числа. Доказать, что $\operatorname{Im}\varphi$ — подгруппа Ли тогда и только тогда, когда $\alpha_j/\alpha_k \in \mathbb{Q}$ при всех $j \neq k$

   (a) при $n = 2$;

   (b) при любом n.

4. Пусть $\mathcal{R} : G \to GL(V)$ — линейное представление группы Ли, $\rho = d\mathcal{R}$ — его дифференциал. Доказать:
$$\rho(gXg^{-1}) = \mathcal{R}(g) \cdot \rho(X) \cdot \mathcal{R}(g)^{-1}, \qquad \forall g \in G,\ X \in \mathfrak{g}.$$

5. Пусть G — группа Ли, и $g \in G$. Доказать, что централизатор $Z(g)$ — подгруппа Ли в G с касательной алгеброй Ли $\mathfrak{z}(g) = \{X \in \mathfrak{g} \mid \operatorname{Ad}(g)X = X\}$.

6. Пусть $\mathcal{R} : G \to GL(V)$ — линейное представление группы Ли, и $U \subset V$ — подпространство. Доказать, что $G_U = \{g \in G \mid \mathcal{R}(g)U = U\}$ — подгруппа Ли, и найти её алгебру Ли.

7. Пусть $\mathfrak{g}$ — 3-мерная алгебра Ли с базисом $\{e_1, e_2, e_3\}$ и коммутационными соотношениями

   (a) $[e_1, e_2] = e_2$;

   (b) $[e_1, e_2] = e_3$;

   (c) $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = -e_2$

   (указаны только ненулевые коммутаторы базисных векторов, с точностью до перестановки аргументов). Найти группу $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ и алгебру Ли $\operatorname{Der}(\mathfrak{g})$ в каждом из случаев.

8. Доказать, что

   (a) группа Ли $O_{p,q}(\mathbb{R})$ изоморфна некоторой вещественной форме группы Ли $O_n(\mathbb{C})$;

   (b) $U_n(\mathbb{H})$ — компактная вещественная форма группы Ли $Sp_{2n}(\mathbb{C})$.