Домашнее задание №21

1. В алгебре Клиффорда векторного пространства с базисом $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, в котором скалярное умножение имеет матрицу
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$
вычислить $(e_1 + e_2)(e_3 - e_4)(e_1 + e_3)(e_2 - e_4)(e_1 + e_4)(e_2 - e_3)$.

2. Обозначим через Cl_n алгебру Клиффорда n-мерного комплексного векторного пространства с квадратичной формой ранга n, и через $\mathrm{Cl}_{p,q}$ алгебру Клиффорда n-мерного вещественного векторного пространства с квадратичной формой сигнатуры (p, q), $p + q = n$. Доказать:
   (a) $\mathrm{Cl}_1 \simeq \mathbb{C} \bigoplus \mathbb{C}$; $\mathrm{Cl}_{1,0} \simeq \mathbb{R} \bigoplus \mathbb{R}$; $\mathrm{Cl}_{0,1} \simeq \mathbb{C}$;
   (b) $\mathrm{Cl}_2 \simeq \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$; $\mathrm{Cl}_{2,0} \simeq \mathrm{Cl}_{1,1} \simeq \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$; $\mathrm{Cl}_{0,2} \simeq \mathbb{H}$.

3. Доказать:
   (a) $\mathrm{Cl}_n \simeq \mathrm{Cl}_2 \otimes \mathrm{Cl}_{n-2} \simeq \mathrm{Mat}_2(\mathrm{Cl}_{n-2})$;
   (b) $\mathrm{Cl}_{p,q} \simeq \mathrm{Cl}_{2,0} \otimes \mathrm{Cl}_{q,p-2} \simeq \mathrm{Cl}_{1,1} \otimes \mathrm{Cl}_{p-1,q-1} \simeq \mathrm{Cl}_{0,2} \otimes \mathrm{Cl}_{q-2,p}$;
   (c) $\mathrm{Cl}_{p,q} \simeq \mathrm{Mat}_{16}(\mathrm{Cl}_{p-8,q}) \simeq \mathrm{Mat}_{16}(\mathrm{Cl}_{p,q-8})$ (*периодичность Ботта*).

   (*Указание*: отщепить от пространства с квадратичной формой двумерное подпространство.)

4. Вычислить:
   (a) $\mathrm{Cl}_{3,6}$;
   (b) Cl_{2m+1}.

5. Доказать, что $\mathrm{Cl}_n \simeq \mathrm{Cl}^+_{n+1}$ (*указание*: добавить к n-мерному пространству ортогональный ему вектор e_0 с $(e_0|e_0) = -1$ и каждый нечётный элемент в Cl_n домножить на e_0).

6. (a) Доказать, что $\mathrm{Spin}(V)$ — связная группа Ли.
   (b) Вычислить касательную алгебру Ли $\mathfrak{spin}(V)$ как подалгебру Ли в $\mathrm{Cl}(V)^{(-)}$ в ортонормированном базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$ пространства V.
   (c) Как $\mathfrak{spin}(V)$ действует в векторном и спинорном представлениях?

7. Вычислить матрицу элемента $e_1 e_2 \in \mathrm{Spin}(V)$ в спинорном представлении (в каком-нибудь базисе пространства спиноров), где V — векторное пространство над $\mathbb{C}$ с ортонормированным базисом $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

8. Доказать, что два полуспинорных представления спинорной группы чётномерного пространства не изоморфны друг другу.