

Домашнее задание №1

1. Классифицировать, с точностью до изоморфизма:
 - (a) двумерные коммутативные ассоциативные алгебры над \mathbb{C} ;
 - (b) двумерные алгебры с единицей над \mathbb{R} .
2. Доказать, что группа обратимых элементов кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ бесконечна.
3. Пусть \mathbb{Z}_p — множество целых p -адических чисел.
 - (a) Доказать, что \mathbb{Z}_p — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей без делителей нуля, содержащее \mathbb{Z} .
 - (b) Найти группу обратимых элементов \mathbb{Z}_p^\times .
 - (c) Описать все идеалы в \mathbb{Z}_p .
4. Описать все идеалы в алгебре $K[[x]]$.
5. Найти группу обратимых элементов факторалгебры $K[x]/K[x] \cdot x^n$.
6. Вычислить:
 - (a) $\left(\sum_{k_1, \dots, k_n \geq 0} \frac{x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}}{k_1! \cdots k_n!} \right)^{-1}$ в $K[[x_1, \dots, x_n]]$;
 - (b) $-1/2$ в \mathbb{Z}_5 .
7. Пусть A — конечное ассоциативное кольцо. Доказать, что:
 - (a) если A не имеет делителей нуля, то A содержит единицу, и все неделители нуля в A обратимы;
 - (b) если A содержит единицу, то в нём любой обратимый слева элемент обратим справа и наоборот;
 - (c) если A содержит единицу, то в нём любой левый делитель нуля является правым делителем нуля и наоборот.
8. Пусть A — ассоциативное кольцо с единицей и $a, b \in A$. Доказать, что:
 - (a) если ab и ba обратимы, то a и b обратимы;
 - (b) если A не имеет делителей нуля и ab обратимо, то a и b обратимы;
 - (c) в общем случае из обратимости ab не следует обратимость a и b ;
 - (d) если $1 + ab$ обратим, то $1 + ba$ обратим.