Домашнее задание №10

1. Пусть A — конечномерная ассоциативная алгебра. Доказать, что алгебра $A/\operatorname{Rad}(A)$ полупроста.

2. Пусть K — поле характеристики $p > 0$, $c \in K$ — элемент, не имеющий корня степени p в K, и $L = K[x]/K[x](x^p - c)$ — расширение поля K, получаемое присоединением корня степени p из c. Будет ли алгебра $L \otimes_K L$ полупростой?

3. Пусть V — конечномерный модуль над полупростой алгеброй $A = \operatorname{Mat}_{n_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Mat}_{n_s}(D_s)$ (D_i — конечномерные алгебры с делением), причём представление алгебры A в пространстве V точно. Доказать:

   (a) каждая изотипная компонента модуля V изоморфна пространству вида $\operatorname{Mat}_{n_i \times m_i}(D_i)$, на котором подалгебра $\operatorname{Mat}_{n_i}(D_i)$ действует умножениями слева, а остальные подалгебры $\operatorname{Mat}_{n_j}(D_j)$ — нулевым образом;

   (b) $B = \operatorname{End}_A(V)^{\mathrm{op}} \simeq \operatorname{Mat}_{m_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Mat}_{m_s}(D_s)$ — полупростая алгебрв;

   (c) $\operatorname{End}_B(V) = A$.

4. Доказать, что все автоморфизмы алгебры $\operatorname{Mat}_n(K)$ — внутренние, т.е. имеют вид $\varphi(x) = gxg^{-1}$ для некоторой матрицы $g \in GL_n(K)$. (*Указание*: рассмотреть φ как линейное представление алгебры $\operatorname{Mat}_n(K)$ в пространстве K^n.)

5. Доказать, что $\operatorname{Mat}_n(A)^{\mathrm{op}} \simeq \operatorname{Mat}_n(A^{\mathrm{op}})$.

6. Пусть D — конечномерная алгебра с делением, и $A = \operatorname{Mat}_n(D)$. Доказать, что алгебра A центральна тогда и только тогда, когда D центральна.

7. Пусть A, B — простые конечномерные ассоциативные алгебры (с ненулевым умножением), причём A центральна. Доказать, что алгебра $A \otimes B$ проста и $Z(A \otimes B) = 1 \otimes Z(B) \simeq Z(B)$. В частности, если A, B центральны, то и $A \otimes B$ центральна.

8. Пусть D — центральная n-мерная алгебра с делением над полем K. Доказать:

   (a) D^{op} — тоже центральная алгебра с делением;

   (b) $D \otimes D^{\mathrm{op}} \simeq \operatorname{Mat}_n(K)$.