Домашнее задание №11

1. Пусть K — поле характеристики $\neq 2$, и $D(K, \alpha, \beta)$ — обобщённая алгебра кватернионов с базисом $\{1, i, j, k\}$.

   (a) Вычислить произведения всех базисных элементов в $D(K, \alpha, \beta)$.

   (b) Доказать, что $D(K, \alpha, 1) \simeq \mathrm{Mat}_2(K)$.

   (c) Как выглядят кватернионное сопряжение и кватернионная норма в $\mathrm{Mat}_2(K)$?

2. Изоморфны ли обобщённые алгебры кватернионов:

   (a) $D(\mathbb{Q}, -1, 2)$ и $D(\mathbb{Q}, -1, 3)$?

   (b) $D(\mathbb{Q}, -1, 3)$ и $D(\mathbb{Q}, -1, -3)$?

   (c) $D(\mathbb{Q}(\boldsymbol{i}), 2\boldsymbol{i}, 3)$ и $D(\mathbb{Q}(\boldsymbol{i}), 2, 3\boldsymbol{i})$?

3. Пусть D — центральная алгебра с делением над полем K, и $L \supset K$ — конечное расширение полей. Доказать:

   (a) минимальный многочлен любого элемента $\delta \in D$ над полем K совпадает с минимальным многочленом элемента $\delta \otimes 1 \in D \otimes_K L$ над полем L;

   (b) существует такое расширение $L \supset K$, что в алгебре $D \otimes_K L$ есть делители нуля;

   (c) существует такое расширение $L \supset K$, что $D \otimes_K L \simeq \mathrm{Mat}_n(L)$, причём $\dim_K D = n^2$.

   Поле L называется *полем расщепления*, а число $n = \deg D$ — *степенью* алгебры D.

4. Найти поле расщепления для обобщённой алгебры кватернионов $D(K, \alpha, \beta)$.

5. Пусть D — центральная алгебра с делением над полем K, и L — поле расщепления для D. Доказать, что $(L : K) \geqslant \deg D$. (*Указание*: рассмотреть L^n как векторное пространство над $D \subset D \otimes_K L \simeq \mathrm{Mat}_n(L)$ и вычислить его размерность над K.)

6. Пусть D — центральная алгебра с делением над полем K, и $L \subset D$ — подполе, содержащее K. Доказать:

   (a) $(L : K) \leqslant \deg D$ (*указание*: посмотреть на степень минимального многочлена примитивного элемента в расширении $L \supset K$);

   (b) $(L : K) = \deg D$ тогда и только тогда, когда L — поле расщепления для D (*указание*: рассмотреть D как (D, L)-бимодуль, т.е. векторное пространство над L с линейным представлением алгебры $D \otimes_K L$);

   (c) существует поле расщепления $L \subset D$.

7. Пусть D — центральная алгебра с делением степени 2 над полем K характеристики $\neq 2$. Доказать, что $D \simeq D(\alpha, \beta)$ для некоторых $\alpha, \beta \in K^{\times}$. (*Указание*: имитировать доказательство теоремы Фробениуса.)