

### Домашнее задание №13

1. Описать все неприводимые комплексные линейные представления групп:

(a)  $Q_8$ ;

(b)  $A_4 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ;

(c)  $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{F}_3 \right\}$ .

2. Найти количество и размерности неприводимых комплексных линейных представлений групп:

(a)  $A_5$ ;

(b) некоммутативной группы  $G$  порядка  $p^3$  (где  $p$  — простое число).

3. Существует ли конечная группа, у которой неприводимые комплексные линейные представления исчерпываются:

(a) двумя одномерными и двумя пятимерными;

(b) пятью одномерными и одним пятимерным?

4. Доказать, что в группе  $GL_2(\mathbb{C})$  нет подгруппы, изоморфной  $S_4$ .

5. Доказать, что в любом пятимерном комплексном линейном представлении группы  $A_4$  имеется одномерное инвариантное подпространство.

6. Доказать, что в группе  $GL_n(\mathbb{C})$  имеется лишь конечное число конечных подгрупп заданного порядка, с точностью до сопряжённости.