Домашнее задание №14

1. Пусть $\varphi : G \to H$ — гомоморфизм конечных групп, который по линейности однозначно продолжается до гомоморфизма групповых алгебр $\widetilde{\varphi} : KG \to KH$. Доказать, что $\operatorname{Ker} \widetilde{\varphi}$ — левый (или правый) идеал в KG, порождённый всеми элементами вида $g - 1$, где $g \in \operatorname{Ker} \varphi$.

2. Пусть G — конечная p-группа, и K — поле характеристики p. Доказать, что $\operatorname{Rad}(KG)$ есть гиперплоскость в KG с базисом из всех элементов вида $g - 1$ ($g \in G \setminus \{1\}$). (*Указание*: рассмотреть вначале случай абелевой группы G, а потом перейти от G к $G/[G, G]$ и применить индукцию по $|G|$.)

3. Найти все простые двусторонние идеалы в алгебре $\mathbb{C}G$ для следующих групп:

   (a) $G = S_3$;

   (b) $G = Q_8$;

   (c) $G = D_5$.

4. Разложить групповую алгебру $\mathbb{Q}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ (где p — простое число) в прямую сумму простых алгебр.

5. Пусть $\mathcal{R}$ — комплексное линейное представление конечной группы G размерности n. Доказать, что $\chi_{\mathcal{R}}(g) = n$ тогда и только тогда, когда $g \in \operatorname{Ker} \mathcal{R}$.

6. Может ли характер линейного представления группы порядка 8 принимать следующий набор значений: $(1, -1, 2, 0, 0, -2, 0, 0)$?

7. Пусть $\mathcal{R} : G \to GL(V)$ — комплексное линейное представление. Доказать:

   (a) подпространства S^2V и $\bigwedge^2 V \subset V^{\otimes 2}$ инвариантны относительно представления $\mathcal{R}^{\otimes 2}$;

   (b) $\chi_{S^2\mathcal{R}}(g) = \frac{1}{2}\big(\chi_{\mathcal{R}}(g)^2 + \chi_{\mathcal{R}}(g^2)\big)$, где $S^2\mathcal{R} = \mathcal{R}^{\otimes 2}|_{S^2V}$;

   (c) $\chi_{\bigwedge^2 \mathcal{R}}(g) = \frac{1}{2}\big(\chi_{\mathcal{R}}(g)^2 - \chi_{\mathcal{R}}(g^2)\big)$, где $\bigwedge^2 \mathcal{R} = \mathcal{R}^{\otimes 2}|_{\bigwedge^2 V}$.

8. Разложить тензорный квадрат 2-мерного неприводимого комплексного линейного представления группы Q_8 на неприводимые слагаемые.