

Домашнее задание №16

1. Доказать связность следующих групп Ли:

- (a) $SO_n(\mathbb{C})$;
- (b) $Sp_{2n}(\mathbb{K})$;
- (c) $U_n(\mathbb{C})$;
- (d) $SU_n(\mathbb{C})$.

2. (a) Описать явно группу Ли $O_{1,1}(\mathbb{R})^\circ$.

(b) Доказать, что группа Ли $O_{p,q}(\mathbb{R})^\circ$ состоит из псевдоортогональных матриц, у которых определитель и верхний левый угловой минор порядка p положительны.

(c) Описать остальные компоненты связности группы $O_{p,q}$.

3. Вычислить $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ для группы Ли $G \subset GL_3(\mathbb{K})$, состоящей из невырожденных матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & z & 1 \end{pmatrix}$$

4. Задаёт ли отображение $t \mapsto g(t)$ линейное представление группы Ли \mathbb{R} ? Если да, то записать его в виде $g(t) = \exp(tA)$.

(a) $g(t) = \begin{pmatrix} \frac{1+e^t}{2} & \frac{1-e^t}{2} \\ \frac{1-e^t}{2} & \frac{1+e^t}{2} \end{pmatrix};$

(b) $g(t) = \begin{pmatrix} e^t & t \\ -t & e^{-t} \end{pmatrix}.$