

Домашнее задание №17

- Разложить в прямую сумму неприводимых слагаемых следующие линейные представления группы Ли $SL_2(\mathbb{C})$:
 - $\mathcal{R}_3 \otimes \mathcal{R}_5 \otimes \mathcal{R}_7$;
 - $\mathcal{R}_1 \otimes \mathcal{R}_{2023} \otimes \mathcal{R}_{2024}$.
- Найти старшие векторы для всех простых подмодулей в \mathfrak{sl}_2 -модуле
 - $V(2) \otimes V(2)$;
 - $V(3) \otimes V(4)$.
- Какова размерность подпространства неподвижных векторов относительно действия группы SL_2 в пространстве $V(n)^{\otimes n}$
 - при $n = 2, 3, 4$;
 - при произвольном n ?
- Разложить на неприводимые слагаемые представление группы SL_2 в подпространствах
 - $S^2V(n)$,
 - $\wedge^2 V(n)$пространства $V(n)^{\otimes 2}$.
- Разложить на неприводимые слагаемые представление группы SL_2 в пространстве $S^3V(3)$.
- Доказать, что представления группы SL_2 в пространствах $S^mV(n)$ и $S^nV(m)$ изоморфны.
- Пусть $\mathcal{R} : SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow GL(V)$ — комплексное линейное представление, и X, Y, Z — стандартный базис алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Обозначим через V_λ собственное подпространство для оператора $d\mathcal{R}(Z)$ с собственным значением λ . Доказать:
 - оператор $d\mathcal{R}(Z)$ диагонализуем, и все его собственные значения — целые;
 - кратности собственных значений k и $-k$ оператора $d\mathcal{R}(Z)$ одинаковы;
 - линейное отображение $d\mathcal{R}(X) : V_k \rightarrow V_{k+2}$ инъективно при $k < 0$ и сюръективно при $k \geq 0$;
 - линейное отображение $d\mathcal{R}(Y) : V_k \rightarrow V_{k-2}$ сюръективно при $k \leq 0$ и инъективно при $k > 0$;
 - линейные отображения $d\mathcal{R}(X)^k : V_{-k} \rightarrow V_k$ и $d\mathcal{R}(Y)^k : V_k \rightarrow V_{-k}$ — изоморфизмы векторных пространств.