Домашнее задание №2

1. Найти все идеалы в двумерной алгебре A с единицей с базисом $(1, e)$ и структурным уравнением $e^2 = 1$.

2. Найти все двусторонние идеалы в кольце матриц $\mathrm{Mat}_n(A)$ над ассоциативным кольцом A с единицей.

3. Доказать, что если в ассоциативном кольце (или алгебре) с единицей все необратимые элементы образуют аддитивную подгруппу (или подпространство), то это множество — двусторонний идеал. Такие кольца (алгебры) называются *локальными*.

4. Найти все максимальные идеалы в кольце вычетов $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. При каких n это кольцо будет локальным?

5. Всякий ли идеал в алгебре непрерывных функций $C[a, b]$ имеет вид

$$I(Y) = \{f \in C[a, b] \mid f|_Y = 0\}$$

для некоторого $Y \subseteq [a, b]$?

6. (*Китайская теорема об остатках*) Пусть A — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, $I_1, \ldots, I_s \lhd A$, причём $I_i + I_j = A$ при $i \neq j$. Доказать:

   (a) $I_1 \cdots I_{s-1} + I_s = A$ (под произведением идеалов понимается идеал, состоящий из всевозможных сумм элементов вида $a_1 \cdots a_{s-1}$, $a_i \in I_i$, — почему это идеал?);

   (b) $I_1 \cap \cdots \cap I_s = I_1 \cdots I_s$;

   (c) гомоморфизм $\varphi : A \to A/I_1 \oplus \cdots \oplus A/I_s$, $\varphi(a) = (a + I_1, \ldots, a + I_s)$ сюръективен;

   (d) $A/(I_1 \cdots I_s) \simeq A/I_1 \oplus \cdots \oplus A/I_s$.