Домашнее задание №3

1. Пусть $p_i = \partial/\partial x_i$ и $q_i =$ (умножение на x_i) — порождающие элементы алгебры Вейля $A_n(K)$, и $f = f(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) \in A_n(K)$ — произвольный элемент алгебры Вейля, канонически записанный в виде многочлена от порождающих элементов, т.е. линейной комбинации одночленов вида $q_1^{l_1} \cdots q_n^{l_n} p_1^{k_n} \cdots p_n^{k_n}$. Доказать, что
$$p_i f - f p_i = \frac{\partial f}{\partial q_i}, \qquad q_i f - f q_i = -\frac{\partial f}{\partial p_i}, \qquad \forall i = 1, \ldots, n.$$

2. Пусть поле K имеет нулевую характеристику. Доказать:
   (a) алгебра $A_n(K)$ проста;
   (b) $K[x_1, \ldots, x_n]$ — *простой* $A_n(K)$-модуль (т.е. не содержит ненулевых собственных подмодулей);
   (c) любой простой $A_n(K)$-модуль бесконечномерен над K.

3. (*Лемма Шура для модулей*) Пусть M, N — простые A-модули. Доказать, что любой ненулевой гомоморфизм $\varphi : M \to N$ является изоморфизмом.

4. Пусть M — абелева группа в аддитивной записи, т.е. $\mathbb{Z}$-модуль. Доказать, что $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq M/\operatorname{Tor}(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, где $\operatorname{Tor}(M)$ — *подгруппа кручения* (состоящая из всех элементов конечного порядка в M).

5. (a) Доказать, что $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \bigoplus_p \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]/\mathbb{Z}$ (бесконечная прямая сумма по всем простым p; в разложении каждого элемента лишь конечное число слагаемых отлично от 0).
   (b) Вычислить $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

6. Пусть M — правый модуль над кольцом A с единицей, а $I \subseteq A$ — левый идеал. Доказать, что $M \otimes_A A/I \simeq M/MI$.

7. Вычислить $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$.