

Домашнее задание №4

1. Пусть V, W — конечномерные векторные пространства над полем K . Доказать:
 - (a) если $V' \subseteq V, W' \subseteq W$ — подпространства, то $V' \otimes W'$ канонически вкладывается в $V \otimes W$ в качестве подпространства (тензорные произведения берутся над K);
 - (b) если $V'' \subseteq V, W'' \subseteq W$ — другой набор подпространств, то

$$(V' \otimes W') \cap (V'' \otimes W'') = (V' \cap V'') \otimes (W' \cap W'');$$
 - (c) любой элемент $u \in V \otimes W$ представим в виде $u = v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 + \dots + v_r \otimes w_r$, где обе системы векторов $\{v_1, \dots, v_r\}$ и $\{w_1, \dots, w_r\}$ в пространствах V, W линейно независимы;
 - (d) число r слагаемых вышеуказанного разложения данного элемента u не зависит от выбора разложения;
 - (e) при $r = 1$ векторы v_1, w_1 определяются по u однозначно с точностью до пропорциональности.
2. Пусть V_1, \dots, V_s, W — конечномерные векторные пространства над полем K . Построить канонический изоморфизм между пространством полилинейных отображений $V_1 \times \dots \times V_s \rightarrow W$ и пространством $V_1^* \otimes \dots \otimes V_s^* \otimes W$.
3. Пусть V, W — векторные пространства размерностей n, m над полем K , и A, B — линейные операторы на V и W , соответственно. Доказать:
 - (a) $\text{tr}(A \otimes B) = \text{tr}(A) \cdot \text{tr}(B)$;
 - (b) $\det(A \otimes B) = \det(A)^m \cdot \det(B)^n$.
4. Доказать:
 - (a) $\text{Mat}_n(K) \otimes_K A \simeq \text{Mat}_n(A)$ для любой ассоциативной алгебры A над полем K ;
 - (b) $\text{Mat}_n(K) \otimes_K \text{Mat}_m(K) \simeq \text{Mat}_{nm}(K)$;
 - (c) $K[x_1, \dots, x_n] \otimes_K K[y_1, \dots, y_m] \simeq K[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$;
 - (d) $\mathcal{F}(X, K) \otimes_K \mathcal{F}(Y, K) \simeq \mathcal{F}(X \times Y, K)$, если хотя бы одно из множеств X, Y конечно (здесь $\mathcal{F}(Z, K)$ — алгебра функций на множестве Z со значениями в поле K);
 - (e) $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \simeq \text{Mat}_2(\mathbb{C})$;
 - (f) $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \simeq \text{Mat}_4(\mathbb{R})$;
 - (g) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \simeq \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.
5. Доказать, что линейное отображение $\varphi : \text{Mat}_n(K) \rightarrow \text{Mat}_n(K) \otimes_K \text{Mat}_n(K)$, задаваемое на базисе из матричных единиц формулой $\varphi(E_{ij}) = E_{ij} \otimes E_{ij}$, является гомоморфизмом алгебр.