

Домашнее задание №5

1. Вычислить $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/50\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/30\mathbb{Z})$.
2. Вычислить $\mathbb{Q}[x]$ -модуль $\text{Hom}_{\mathbb{Q}[x]}(\mathbb{Q}[x]/\mathbb{Q}[x](x^4 - 5x^2 + 6), \mathbb{Q}[x]/\mathbb{Q}[x](x^3 - 2x^2 - 3x + 6))$.
3. (Сопряжённость функторов Hom и \otimes)

(a) Пусть M — (A, B) -бимодуль, N — (B, C) -бимодуль, и P — (D, C) -бимодуль. Построить изоморфизм (D, A) -бимодулей:

$$\text{Hom}_B(M, \text{Hom}_C(N, P)) \simeq \text{Hom}_C(M \otimes_B N, P).$$

(b) Пусть M — (A, B) -бимодуль, N — (C, A) -бимодуль, и P — (C, D) -бимодуль. Построить изоморфизм (B, D) -бимодулей:

$$\text{Hom}_A(M, \text{Hom}_C(N, P)) \simeq \text{Hom}_C(N \otimes_A M, P).$$

4. Доказать, что если кольцо A нётерово, то кольцо формальных степенных рядов $A[[x]]$ нётерово.
5. Нётерово ли кольцо непрерывных функций на отрезке $C[a, b]$?
6. Доказать, что если кольцо A нётерово, то кольцо косых многочленов $A\langle x | \partial \rangle$ (где ∂ — дифференцирование кольца A) нётерово с той же стороны.
7. Доказать, что алгебра Вейля $A_n(K)$ нётерова слева и справа.