Домашнее задание №6

1. Какие из колец евклидовы?
   (a) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$;
   (b) $\mathbb{Z}[(1+i\sqrt{3})/2]$;
   (c) $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$.

2. В кольце $\mathbb{Z}[i]$:
   (a) поделить с остатком $40+i$ на $3-i$;
   (b) найти наибольший общий делитель $20+9i$ и $13+4i$.

3. С помощью разложения на простые множители в кольце $\mathbb{Z}[i]$ найти число способов разложить натуральное число n в сумму двух квадратов $n = a^2 + b^2$, $a, b \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ (порядок слагаемых не учитывается):
   (a) если n имеет натуральный простой делитель $p = 4k+3$ нечётной кратности, то в сумму двух квадратов не разлагается;
   (b) если все натуральные простые делители вида $p = 4k+3$ числа n имеют чётную кратность, и других нечётных простых делителей нет, то n имеет единственное разложение;
   (c) в остальных случаях число способов разложения равно $\lceil (m_1+1)\cdots(m_s+1)/2 \rceil$, где $m_1, \ldots, m_s$ — кратности простых делителей $p_1, \ldots, p_s$ вида $4k+1$ числа n ($\lceil \cdot \rceil$ обозначает *верхнюю целую часть* числа, т.е. ближайшее сверху целое число).

4. Найти все разложения в сумму двух квадратов (в смысле задачи 3) чисел
   (a) 1980;
   (b) 15925;
   (c) 78408.

5. Кватернион $q = a + bi + cj + dk$ называется *целым*, если либо $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, либо $a, b, c, d \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$. Доказать:
   (a) множество целых кватернионов $\mathbb{H}_{\text{int}}$ — ассоциативное кольцо с единицей без делителей нуля, на котором кватернионная норма $N(q) = q\bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ принимает целые неотрицательные значения;
   (b) для любого $q \in \mathbb{H}$ существует такой $q_0 \in \mathbb{H}_{\text{int}}$, что $N(q - q_0) < 1$;
   (c) (*деление с остатком*) для любых $q_1, q_2 \in \mathbb{H}_{\text{int}} \setminus \{0\}$ существуют такие $q_0, r \in \mathbb{H}_{\text{int}}$, что $q_1 = q_2 q_0 + r$ и $N(r) < N(q_2)$;
   (d) все левые и все правые идеалы в $\mathbb{H}_{\text{int}}$ — главные.

6. Найти группу $\mathbb{H}_{\text{int}}^{\times}$.

7. Пусть $p \in \mathbb{N}$ — простое число. Доказать:
   (a) существуют такие $m, n \in \mathbb{Z}$, что m^2+n^2+1 делится на p (*указание*: рассмотреть уравнение $x^2 + y^2 + \bar{1} = \bar{0}$ над $\mathbb{F}_p$);
   (b) $p = N(\pi)$ для некоторого $\pi \in \mathbb{H}_{\text{int}}$ (*указание*: в обозначениях пункта 7a, для $q = 1+mi+nj$ рассмотреть правый идеал $q\mathbb{H}_{\text{int}} + p\mathbb{H}_{\text{int}} = \pi\mathbb{H}_{\text{int}}$);
   (c) если $\pi = a + bi + cj + dk$, где $a, b, c, d \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$, то для некоторого $\rho = \pm\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i \pm \frac{1}{2}j \pm \frac{1}{2}k$ целый кватернион $\pi\rho$ имеет целые координаты в базисе $\{1, i, j, k\}$ и ту же норму p.

8. Доказать, что любое натуральное число n представимо в виде суммы четырёх квадратов: $n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.