Домашнее задание №7

1. Пусть $\omega = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{19}}{2}$. Проверить:
   (a) $\omega^2 - \omega + 5 = 0$;
   (b) $\bar{\omega} = 1 - \omega$.

2. Рассмотрим кольцо $A = \mathbb{Z}[\omega]$. Доказать:
   (a) $A = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\omega$ (как абелева группа);
   (b) *норма* $N(a) = a\bar{a}$ принимает на A целые неотрицательные значения;
   (c) если $N(a) \vdots 2$, то $a \vdots 2$ в A.

3. Найти группу $A^\times$.

4. Доказать, что для любого $z \in \mathbb{C}$ существует такое $a \in A$, что либо $|z - a| < 1$, либо $|2z - a| < 1$ (*указание*: разложить $z = a + w$, где $-\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(w) \leq \frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2} < \mathrm{Im}(w) \leq \frac{\sqrt{19}-\sqrt{3}}{2}$).

5. Пусть $I \lhd A$, и $c \in I$ — ненулевой элемент. Доказать:
   (a) если $b \in I$ и $2b \vdots c$, то либо $b \vdots c$, либо $c/2 \in I$ (*указание*: $ca\bar{a}/2 \in I$ для $a = 2b/c$);
   (b) если $N(c) = \min$ (среди ненулевых элементов идеала I), то $I = Ac$.

   Следовательно, A — кольцо главных идеалов.

6. Доказать:
   (a) в любом евклидовом кольце R существует такой простой элемент p, что естественный гомоморфизм $R^\times \to (R/Rp)^\times$ сюръективен (*указание*: рассмотреть необратимый элемент наименьшей нормы);
   (b) для любого простого элемента $p \in A$ гомоморфизм $A^\times \to (A/Ap)^\times$ не сюръективен (*указание*: уравнение $x^2 - x + \bar{5} = \bar{0}$ в $\mathbb{F}_2$ и $\mathbb{F}_3$ не имеет решений).

   Следовательно, кольцо A неевклидово.