Домашнее задание №8

1. Пусть $M = F/N$ — фактормодуль свободного модуля F с базисом f_1, f_2, f_3 над евклидовым кольцом $\mathbb{Z}[(1+i\sqrt{3})/2]$ по подмодулю N, порождённому элементами

$$\begin{aligned}
n_1 &= 4\boldsymbol{i}\sqrt{3}f_1 + (9+\boldsymbol{i}\sqrt{3})f_2 + 2\boldsymbol{i}\sqrt{3}f_3,\\
n_2 &= (9-\boldsymbol{i}\sqrt{3})f_1 + (6-4\boldsymbol{i}\sqrt{3})f_2 + (\boldsymbol{i}\sqrt{3}-3)f_3,\\
n_3 &= (3-5\boldsymbol{i}\sqrt{3})f_1 - (3+5\boldsymbol{i}\sqrt{3})f_2 + 2\boldsymbol{i}\sqrt{3}f_3,\\
n_4 &= (6\boldsymbol{i}\sqrt{3}-6)f_1 + (3+5\boldsymbol{i}\sqrt{3})f_2 + (3-\boldsymbol{i}\sqrt{3})f_3.
\end{aligned}$$

   Найти ранг, инвариантные множители и элементарные делители модуля M.

2. Пусть $M = F/N$ — фактормодуль свободного модуля F с базисом $f_1, \ldots, f_n$ над кольцом главных идеалов A по подмодулю N, порождённому элементами $n_j = a_{1j}f_1 + \cdots + a_{nj}f_n$, $j = 1, \ldots, k$, и $u_1, \ldots, u_m \in A$ — инвариантные множители модуля M. Доказать, что произведение $u_1 \cdots u_p$ равно наибольшему общему делителю всех миноров порядка $r-m+p$ матрицы (a_{ij}), где $r = \mathrm{rk}(a_{ij})$.

3. Привести к нормальной форме Фробениуса линейный оператор, имеющий в исходном базисе матрицу:

   (a) $\begin{pmatrix} 6 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ над полем $\mathbb{Q}$;

   (b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ -6 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ над полем $\mathbb{Q}$;

   (c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ над полем $\mathbb{F}_2$.

   Найти базис, в котором данный оператор имеет нормальную форму Фробениуса.

4. Линейные операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ на пространствах V и V' называются эквивалентными или *подобными*, если существует изоморфизм векторных пространств $\mathcal{C} : V \xrightarrow{\sim} V'$, отождествляющий $\mathcal{A}$ с $\mathcal{A}'$, т.е. $\mathcal{C} \cdot \mathcal{A} = \mathcal{A}' \cdot \mathcal{C}$ (другими словами, матрицы этих операторов в подходящих базисах приводятся к одному и тому же виду). Доказать, что линейные операторы подобны тогда и только тогда, когда у них одинаковы нормальные формы Фробениуса.

5. Описать классы подобия линейных операторов в векторном пространстве над полем $\mathbb{F}_2$

   (a) размерности 2

   (b) размерности 3

   и указать канонические виды матриц этих операторов в каждом классе подобия.

6. Сколько существует классов подобия линейных операторов

   (a) в 4-мерном векторном пространстве над полем $\mathbb{F}_2$

   (b) в 3-мерном векторном пространстве над полем $\mathbb{F}_3$?