Домашнее задание №9

1. Пусть A — ассоциативная алгебра с единицей, и $\mathcal{R} : A \to \mathrm{L}(V)$ — её линейное представление. Доказать, что существует разложение в прямую сумму инвариантных подпространств $V = V_0 \oplus V_1$, для которого $\mathcal{R}|_{V_0}$ — нулевое представление (т.е. все операторы $\mathcal{R}(a)$ нулевые), а $\mathcal{R}|_{V_1}$ — представление алгебры с единицей (т.е. $\mathcal{R}(1)|_{V_1}$ — единичный оператор).

2. Доказать: $\mathrm{Rad}(A_1 \oplus \dots \oplus A_s) = \mathrm{Rad}(A_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{Rad}(A_s)$.

3. Доказать, что радикал коммутативной ассоциативной алгебры совпадает с множеством её нильпотентных элементов.

4. Доказать, что радикал конечномерной ассоциативной алгебры A с единицей совпадает с пересечением
   (a) всех максимальных левых идеалов;
   (b) всех максимальных правых идеалов.

5. Пусть $K \subset L$ — конечное расширение полей. Доказать, что стандартное скалярное умножение на L (как алгебре над K) — либо невырожденное, либо нулевое.

6. Вычислить матрицу стандартного скалярного умножения алгебры $\mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$ в базисе $(1, i)$.

7. Пусть $A = K[x]/K[x]f$, где $f(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_n \in K[x]$.
   (a) Доказать, что ранг стандартного скалярного умножения на A равен числу различных корней многочлена f в его поле разложения.
   (b) Всегда ли верно, что $\mathrm{Rad}(A)$ совпадает с ядром стандартного скалярного умножения?

8. Пусть в задаче 7 $K = \mathbb{R}$ и f сепарабелен. Доказать, что число вещественных корней многочлена f равно $p - q$, где p и q — положительный и отрицательный индексы инерции стандартного скалярного умножения на A. (*Указание*: разложить A в прямую сумму полей.)