Домашнее задание №1

1. Классифицировать, с точностью до изоморфизма:
   (a) двумерные коммутативные ассоциативные алгебры над $\mathbb{C}$;
   (b) двумерные алгебры с единицей над $\mathbb{R}$.

2. Доказать, что группа обратимых элементов кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ бесконечна.

3. Пусть $\mathbb{Z}_p$ — множество целых p-адических чисел.
   (a) Доказать, что $\mathbb{Z}_p$ — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей без делителей нуля, содержащее $\mathbb{Z}$.
   (b) Найти группу обратимых элементов $\mathbb{Z}_p^\times$.
   (c) Описать все идеалы в $\mathbb{Z}_p$.

4. Описать все идеалы в алгебре $K[[x]]$.

5. Вычислить:
   (a) $\left(\sum\limits_{k_1,\ldots,k_n\geq 0} \dfrac{x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}}{k_1!\cdots k_n!}\right)^{-1}$ в $K[[x_1,\ldots,x_n]]$;
   (b) $3/4$ в $\mathbb{Z}_7$.

6. Пусть A — конечномерная ассоциативная алгебра. Доказать, что:
   (a) если A не имеет делителей нуля, то A содержит единицу;
   (b) если A содержит единицу, то все062 неделители нуля в A обратимы;
   (c) если A содержит единицу, то в A любой обратимый слева элемент обратим справа и наоборот;
   (d) если A содержит единицу, то в A любой левый делитель нуля является правым делителем нуля и наоборот.

7. Пусть A — ассоциативное кольцо с единицей и $a, b \in A$. Доказать, что:
   (a) если ab и ba обратимы, то a и b обратимы;
   (b) если A не имеет делителей нуля и ab обратимо, то a и b обратимы;
   (c) в общем случае из обратимости ab не следует обратимость a и b;
   (d) если $1 + ab$ обратим, то $1 + ba$ обратим.

8. (a) Доказать, что если в ассоциативном кольце (или алгебре) с единицей все необратимые элементы образуют аддитивную подгруппу (или подпространство), то это множество — двусторонний идеал. Такие кольца (алгебры) называются *локальными*.
   (b) Какие из колец $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_p$, $K[x_1,\ldots,x_n]$, $K[[x_1,\ldots,x_n]]$ локальны?
   (c) Привести пример некоммутативного локального кольца.