Домашнее задание №11

1. Пусть $\varphi : G \to H$ — гомоморфизм конечных групп, который по линейности однозначно продолжается до гомоморфизма групповых алгебр $\widetilde{\varphi} : KG \to KH$. Доказать, что $\operatorname{Ker} \widetilde{\varphi}$ — левый (или правый) идеал в KG, порождённый всеми элементами вида $g - 1$, где $g \in \operatorname{Ker} \varphi$.

2. Пусть G — конечная p-группа, и K — поле характеристики p. Доказать, что $\operatorname{Rad}(KG)$ есть гиперплоскость в KG с базисом из всех элементов вида $g - 1$ ($g \in G \setminus \{1\}$). (*Указание*: рассмотреть вначале случай абелевой группы G, а потом перейти от G к $G/[G, G]$ и применить индукцию по $|G|$.)

3. Пусть G и H — две конечные группы. Построить изоморфизм алгебр $K(G \times H) \simeq KG \otimes KH$.

4. Изоморфна ли алгебра обобщённых кватернионов $D(K, \alpha, \beta)$ групповой алгебре какой-нибудь конечной группы?

5. Рассмотрим групповую алгебру KG конечной группы G над полем K характеристики, не делящей $|G|$ (возможно, нулевой). Каким элементом порождается одномерный идеал $A_i \triangleleft KG$, отвечающий одномерному представлению $\rho_i : G \to K^\times$?

6. (a) Сколько с точностью до изоморфизма имеется групповых алгебр размерности 12 над полем $\mathbb{C}$?
   (b) Каким группам соответствуют эти алгебры?

7. Найти все простые двусторонние идеалы в алгебре $\mathbb{C}G$ для следующих групп:
   (a) $G = Q_8$;
   (b) $G = D_5$.

8. Разложить групповую алгебру $\mathbb{Q}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ (где p — простое число) в прямую сумму простых алгебр.