

## Домашнее задание №12

1. Пусть  $\mathcal{R}$  — комплексное линейное представление конечной группы  $G$  размерности  $n$ . Доказать, что  $\chi_{\mathcal{R}}(g) = n$  тогда и только тогда, когда  $g \in \text{Ker } \mathcal{R}$ .
2. Может ли характер комплексного линейного представления группы  $Q_8$  принимать на наборе элементов  $(1, -1, i, -i, j, -j, k, -k)$  следующий набор значений:

(a)  $(5, -3, 0, 0, -1, -1, 0, 0)$ ;

(b)  $(5, 1, 1, 1, -1, -1, 1, 1)$ ?

3. Пусть  $\chi$  — характер нетривиального неприводимого комплексного линейного представления конечной группы  $G$ . Чему равно среднее значение

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)?$$

4. Пусть  $G$  — конечная группа. Доказать, что для любого неединичного элемента  $g \in G$  существует такой неприводимый характер  $\chi \neq 1$  группы  $G$ , что  $\chi(g) \neq 0$ .

5. Пусть  $\mathcal{R} : G \rightarrow GL(V)$  — комплексное линейное представление. Доказать:

(a)  $\chi_{\mathcal{R}^*}(g) = \overline{\chi_{\mathcal{R}}(g)}$ ;

(b) подпространства  $S^2V$  и  $\Lambda^2V \subset V^{\otimes 2}$  инвариантны относительно представления  $\mathcal{R}^{\otimes 2}$ ;

(c)  $\chi_{S^2\mathcal{R}}(g) = \frac{1}{2}(\chi_{\mathcal{R}}(g)^2 + \chi_{\mathcal{R}}(g^2))$ , где  $S^2\mathcal{R} = \mathcal{R}^{\otimes 2}|_{S^2V}$ ;

(d)  $\chi_{\Lambda^2\mathcal{R}}(g) = \frac{1}{2}(\chi_{\mathcal{R}}(g)^2 - \chi_{\mathcal{R}}(g^2))$ , где  $\Lambda^2\mathcal{R} = \mathcal{R}^{\otimes 2}|_{\Lambda^2V}$ .

6. Разложить тензорный квадрат 2-мерного неприводимого комплексного линейного представления группы  $Q_8$  на неприводимые слагаемые.

7. На каждой грани куба написано число. Выполним следующее действие: заменим одновременно каждое из этих чисел на среднее арифметическое чисел, записанных в соседних гранях.

(a) Как приблизительно может выглядеть распределение чисел по граням куба после повторения этого действия большое число раз?

(b) Написать точные формулы для чисел, которые появятся на гранях куба через  $N$  шагов.

(Указание: рассмотреть линейное представление группы вращений куба в пространстве функций на множестве граней куба.)