

### Домашнее задание №13

1. Вложить группу  $GA_n(\mathbb{K})$  аффинных преобразований  $n$ -мерного аффинного пространства над полем  $\mathbb{K}$  в  $GL_{n+1}(\mathbb{K})$  в качестве подгруппы линейных преобразований, сохраняющих гиперплоскость  $\{x_{n+1} = 1\}$ , и доказать, что она является подгруппой Ли. Найти её размерность и касательную алгебру Ли.
2. Доказать, что  $Sp_{2n}(\mathbb{K}) \subseteq SL_{2n}(\mathbb{K})$ .
3. Пусть на  $n$ -мерном векторном пространстве  $V$  на поле  $\mathbb{R}$  задана невырожденная симметрическая билинейная форма  $\beta$  сигнатуры  $(p, q)$ . Линейный оператор на  $V$ , сохраняющий форму  $\beta$ , называется *псевдоортогональным*. Псевдоортогональные операторы образуют подгруппу  $O(V, \beta) \subset GL(V)$ , называемую *псевдоортогональной группой*.
  - (a) Задать псевдоортогональную группу матричным уравнением в ортонормированном базисе пространства  $V$  — соответствующая матричная группа обозначается  $O_{p,q}(\mathbb{R})$ .
  - (b) Доказать, что  $O_{p,q}(\mathbb{R})$  — группа Ли.
  - (c) Найти размерность и касательную алгебру Ли группы  $O_{p,q}(\mathbb{R})$ .
4. Доказать связность следующих групп Ли:
  - (a)  $Sp_{2n}(\mathbb{K})$ ;
  - (b)  $U_n(\mathbb{C})$ ;
  - (c)  $SU_n(\mathbb{C})$ .
5. Найти компоненты связности группы Ли  $GL_n(\mathbb{R})$ .
6.
  - (a) Описать явно группу Ли  $O_{1,1}(\mathbb{R})^\circ$ .
  - (b) Доказать, что группа Ли  $O_{p,q}(\mathbb{R})^\circ$  состоит из псевдоортогональных матриц, у которых определитель и верхний левый угловой минор порядка  $p$  положительны.
  - (c) Описать остальные компоненты связности группы  $O_{p,q}(\mathbb{R})$ .