Домашнее задание №14

1. (a) Доказать, что если G — коммутативная группа Ли, то её касательная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ *коммутативна* в следующем смысле: $[X, Y] = 0$, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$.

   (b) Верно ли обратное?

2. Вычислить $\exp : \mathfrak{g} \to G$ для группы Ли $G \subset GL_3(\mathbb{K})$, состоящей из невырожденных матриц вида
$$\begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & z & 1 \end{pmatrix}$$

3. Доказать, что экспоненциальное отображение $\exp : \mathfrak{g} \to G$

   (a) для $G = GL_n(\mathbb{C})$ сюръективно, но не инъективно;

   (b) для $G = SL_2(\mathbb{R})$ не сюръективно и не инъективно;

   (c) для группы $G = N_n(\mathbb{K})$ верхних унитреугольных матриц является диффеоморфизмом.

4. Задаёт ли отображение $t \mapsto g(t)$ линейное представление группы Ли $\mathbb{R}$? Если да, то записать его в виде $g(t) = \exp(tA)$.

   (a) $g(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{1+e^t}{2} & \dfrac{1-e^t}{2} \\ \dfrac{1-e^t}{2} & \dfrac{1+e^t}{2} \end{pmatrix}$;

   (b) $g(t) = \begin{pmatrix} e^t & t \\ -t & e^{-t} \end{pmatrix}$.

5. Доказать, что все линейные представления аддитивной группы Ли $\mathbb{K}^n$ имеют вид:
$$\mathcal{R}(t_1, \dots, t_n) = \exp(t_1\mathcal{A}_1 + \dots + t_n\mathcal{A}_n) \qquad (t_1, \dots, t_n \in \mathbb{K}),$$
где $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ — набор попарно коммутирующих линейных операторов на пространстве представления.

6. Доказать, что все линейные представления

   (a) вещественной группы Ли $U_1(\mathbb{C})^n = U_1(\mathbb{C}) \times \dots \times U_1(\mathbb{C})$

   (b) комплексной группы Ли $(\mathbb{C}^\times)^n = \mathbb{C}^\times \times \dots \times \mathbb{C}^\times$

   вполне приводимы.

7. Описать все неприводимые комплексные линейные представления групп Ли:

   (a) $U_1(\mathbb{C})^n$;

   (b) $(\mathbb{C}^\times)^n$;

   (c) $(\mathbb{R}^\times)^n$.