Домашнее задание №15

1. Разложить в прямую сумму неприводимых слагаемых следующие линейные представления группы Ли $SL_2(\mathbb{C})$:
   (a) $\mathcal{R}_3 \otimes \mathcal{R}_5 \otimes \mathcal{R}_7$;
   (b) $\mathcal{R}_1 \otimes \mathcal{R}_{2025} \otimes \mathcal{R}_{2026}$.

2. Найти старшие векторы для всех простых подмодулей в $\mathfrak{sl}_2$-модуле
   (a) $V(2) \otimes V(2)$;
   (b) $V(3) \otimes V(4)$.

3. Какова размерность подпространства неподвижных векторов относительно действия группы SL_2 в пространстве $V(n)^{\otimes n}$
   (a) при $n = 2, 3, 4$;
   (b) при произвольном n?

4. Разложить на неприводимые слагаемые представление группы SL_2 в подпространствах
   (a) $S^2V(n)$,
   (b) $\bigwedge^2 V(n)$

   пространства $V(n)^{\otimes 2}$.

5. Разложить на неприводимые слагаемые представление группы SL_2 в пространстве $S^3V(3)$.

6. Доказать, что представления группы SL_2 в пространствах $S^mV(n)$ и $S^nV(m)$ изоморфны.

7. Пусть $\mathcal{R} : SL_2(\mathbb{C}) \to GL(V)$ — комплексное линейное представление, и X, Y, Z — стандартный базис алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Обозначим через V_λ собственное подпространство для оператора $d\mathcal{R}(Z)$ с собственным значением λ. Доказать:
   (a) оператор $d\mathcal{R}(Z)$ диагонализуем, и все его собственные значения — целые;
   (b) кратности собственных значений k и $-k$ оператора $d\mathcal{R}(Z)$ одинаковы;
   (c) линейное отображение $d\mathcal{R}(X) : V_k \to V_{k+2}$ инъективно при $k < 0$ и сюръективно при $k \geq 0$;
   (d) линейное отображение $d\mathcal{R}(Y) : V_k \to V_{k-2}$ сюръективно при $k \leq 0$ и инъективно при $k > 0$;
   (e) линейные отображения $d\mathcal{R}(X)^k : V_{-k} \to V_k$ и $d\mathcal{R}(Y)^k : V_k \to V_{-k}$ — изоморфизмы векторных пространств.