Домашнее задание №16

1. Вычислить все сферические функции Лапласа $f_{n,k}$ ($k = 0, 1, \ldots, 2n$) при $n = 4, 5, 6$.

2. Доказать *формулу Родрига* для многочленов Лежандра:

$$p_n(y) = \frac{n!}{(2n)!} \left((y^2 - 1)^n \right)^{(n)}$$

3. Введём на пространстве многочленов $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ эрмитово скалярное умножение так, чтобы все одночлены $x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}$ были ортогональны друг другу и имели скалярные квадраты $k_1! k_2! k_3!$. Доказать:

   (a) оператор умножения на $q = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ и оператор Лапласа $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ эрмитово сопряжены друг другу;

   (b) инвариантное дополнительное подпространство H_n к $q \cdot \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_{n-2}$ в $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_n$ есть пространство всех *гармонических* (т. е. аннулируемых оператором $\triangle$) однородных многочленов степени n.