Домашнее задание №17

1. Пусть $\mathfrak{g}$ — трёхмерное евклидово пространство с ортонормированным базисом $\{e_1, e_2, e_3\}$ и структурой алгебры Ли, заданной векторным умножением. Вычислить в $U(\mathfrak{g})$ элемент $e_3e_2e_1$ (выразить через базис универсальной обёртывающей алгебры).

2. Рассмотрим *элемент Казимира* $c = X \cdot Y + Y \cdot X + \frac{1}{2}Z^2 \in U(\mathfrak{sl}_2)$.

   (a) Вычислить действие элемента c в пространстве $V(n)$ неприводимого представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ со старшим весом n.

   (b) Какой дифференциальный оператор задаёт действие элемента c в алгебре многочленов $\mathbb{C}[x, y]$?

   (c)* Доказать, что $Z(U(\mathfrak{sl}_2)) = \mathbb{C}[c]$.

3. В алгебре Клиффорда векторного пространства с базисом $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, в котором скалярное умножение имеет матрицу
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$
вычислить $(e_1+e_2)(e_3-e_4)(e_1+e_3)^{-1}(e_2-e_4)(e_1+e_4)(e_2-e_3)^{-1}$ (выразить через базис алгебры Клиффорда).

4. Доказать:

   (a) $\mathrm{Cl}_n \simeq \mathrm{Cl}_2 \otimes \mathrm{Cl}_{n-2} \simeq \mathrm{Mat}_2(\mathrm{Cl}_{n-2})$;

   (b) $\mathrm{Cl}_{p,q} \simeq \mathrm{Cl}_{2,0} \otimes \mathrm{Cl}_{q,p-2} \simeq \mathrm{Cl}_{1,1} \otimes \mathrm{Cl}_{p-1,q-1} \simeq \mathrm{Cl}_{0,2} \otimes \mathrm{Cl}_{q-2,p}$;

   (c) $\mathrm{Cl}_{p,q} \simeq \mathrm{Mat}_{16}(\mathrm{Cl}_{p-8,q}) \simeq \mathrm{Mat}_{16}(\mathrm{Cl}_{p,q-8})$ (*периодичность Ботта*).

   (*Указание*: отщепить от пространства с квадратичной формой двумерное подпространство.)

5. Вычислить:

   (a) $\mathrm{Cl}_{3,6}$;

   (b) Cl_{2m+1}.

6. Доказать, что $\mathrm{Cl}_n \simeq \mathrm{Cl}^+_{n+1}$ (*указание*: добавить к n-мерному пространству ортогональный ему вектор e_0 с $(e_0|e_0) = -1$ и каждый нечётный элемент в Cl_n домножить на e_0).

7. Вычислить матрицу элемента $e_1e_2 \in \mathrm{Spin}(V)$ в спинорном представлении (в каком-нибудь базисе пространства спиноров), где V — векторное пространство над $\mathbb{C}$ с ортонормированным базисом $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

8. Доказать, что два полуспинорных представления спинорной группы чётномерного пространства не изоморфны друг другу.