Домашнее задание №2

1. Найти все идеалы в двумерной алгебре A с единицей с базисом $(1, e)$ и структурным уравнением $e^2 = 1$.

2. Найти все максимальные идеалы в кольцах:

   (a) $\mathbb{Z}$;

   (b) $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$;

   (c) $\mathbb{C}[x]$;

   (d) $\mathbb{R}[x]$.

3. Всякий ли идеал в алгебре непрерывных функций $C[a, b]$ имеет вид

$$I_Y = \{f \in C[a, b] \mid f(y) = 0, \forall y \in Y\}$$

   для некоторого $Y \subseteq [a, b]$?

4. Пусть $p_i = \partial/\partial x_i$ и $q_i =$ (умножение на x_i) — порождающие элементы алгебры Вейля $A_n(K)$ над полем K нулевой характеристики. Доказать:

   (a) любой элемент алгебры Вейля можно единственным образом записать в виде многочлена $f = f(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$, т.е. линейной комбинации одночленов вида $q_1^{l_1} \cdots q_n^{l_n} p_1^{k_n} \cdots p_n^{k_n}$;

   (b) имеют место соотношения

$$p_i f - f p_i = \frac{\partial f}{\partial q_i}, \qquad q_i f - f q_i = -\frac{\partial f}{\partial p_i}, \qquad \forall i = 1, \ldots, n.$$

5. Доказать, что если поле K имеет нулевую характеристику, то алгебра $A_n(K)$ проста.

6. (*Китайская теорема об остатках*) Пусть A — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, $I_1, \ldots, I_s \lhd A$, причём $I_i + I_j = A$ при $i \neq j$. Доказать:

   (a) $I_1 \cdots I_{s-1} + I_s = A$ (под произведением идеалов понимается идеал, состоящий из всевозможных сумм элементов вида $a_1 \cdots a_{s-1}$, $a_i \in I_i$, — почему это идеал?);

   (b) $I_1 \cap \cdots \cap I_s = I_1 \cdots I_s$;

   (c) гомоморфизм $\varphi : A \to A/I_1 \oplus \cdots \oplus A/I_s$, $\varphi(a) = (a + I_1, \ldots, a + I_s)$ сюръективен;

   (d) $A/(I_1 \cdots I_s) \simeq A/I_1 \oplus \cdots \oplus A/I_s$.