Домашнее задание №3

1. Пусть поле K имеет нулевую характеристику. Доказать, что любой ненулевой модуль над алгеброй Вейля $A_n(K)$ бесконечномерен над K.

2. Пусть A — алгебра матриц вида

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline X & 0 & Y \\ \hline 0 & Z & 0 \\ \hline 0 & 0 & Z \\ \hline \end{array}\,, \qquad X, Y, Z \in \mathrm{Mat}_n(K),$$

   и $M = K^{3n}$ — левый A-модуль.

   (a) Найти все композиционные ряды модуля M.

   (b) Найти наборы простых факторов этих композиционных рядов.

   (c) Разложить M в прямую сумму неразложимых подмодулей. Единственно ли это разложение?

3. Пусть M — модуль над кольцом или алгеброй. Доказать:

   (a) M имеет конечную длину тогда и только тогда, когда в нём не существует бесконечной последовательности подмодулей M_i ($i \in \mathbb{N}$), как возрастающей: $M_1 \subset M_2 \subset \dots$ (свойство *нётеровости*), так и убывающей: $M_1 \supset M_2 \supset \dots$ (свойство *артиновости*);

   (b) если M имеет конечную длину, то любой его подмодуль и любой фактормодуль тоже имеет конечную длину.

4. При каких $n \in \mathbb{N}$ модуль $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ над кольцом $\mathbb{Z}$ полупрост?

5. Доказать:

   (a) $\mathbb{Z}$-модуль $\mathbb{Q}$ неразложим;

   (b) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \bigoplus_p \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]/\mathbb{Z}$ (бесконечная прямая сумма по всем простым p; в разложении каждого элемента лишь конечное число слагаемых отлично от 0).

6. (a) Вычислить группы гомоморфизмов $\mathbb{Z}$-модулей: $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$.

   (b) Вычислить кольца эндоморфизмов $\mathbb{Z}$-модулей: $\mathrm{End}(\mathbb{Q})$, $\mathrm{End}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

   (c) Доказать, что $\mathrm{End}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq \prod_p \mathbb{Z}_p$ (бесконечное произведение по всем простым p).

7. (*Лемма Фиттинга*) Пусть M — неразложимый модуль конечной длины, и $\varphi \in \mathrm{End}(M)$. Доказать:

   (a) если φ сюръективен, то это автоморфизм (*указание*: рассмотреть последовательность подмодулей $\mathrm{Ker}(\varphi^n)$);

   (b) в противном случае φ нильпотентен (*указание*: рассмотреть последовательность подмодулей $\mathrm{Im}(\varphi^n)$ и отщепить $\mathrm{Im}(\varphi^n)$ прямым слагаемым при достаточно большом n).

8. Модуль M конечной длины неразложим тогда и только тогда, когда кольцо $\mathrm{End}(M)$ локально.

9. (*Теорема Крулля–Ремака–Шмидта*) Пусть $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_k = N_1 \oplus \dots \oplus N_l$ — два разложения модуля конечной длины в прямую сумму неразложимых подмодулей. Обозначим через $\varphi_{ij} : N_j \to M_i$ и $\psi_{ji} : M_i \to N_j$ отображения проекции на слагаемые первого и второго разложений, соответственно. Доказать:

   (a) для любого $i \in \{1, \dots, k\}$ существует такой $j \in \{1, \dots, l\}$, что $\varphi_{ij}\psi_{ji} : M_i \to M_i$ — автоморфизм (*указание*: $\varphi_{i1}\psi_{1i} + \dots + \varphi_{il}\psi_{li} = \mathrm{id}_{M_i}$);

   (b) в этом случае φ_{ij} и ψ_{ji} — изоморфизмы (*указание*: $\psi_{ji}\varphi_{ij}$ — тоже автоморфизм);

   (c) если φ_{11} — изоморфизм, то $M = N_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_k$;

   (d) $k = l$ и, с точностью до перестановки слагаемых, $M_i \simeq N_i$ при всех $i = 1, \dots, k$.