Домашнее задание №4

1. Вычислить:

   (a) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$;

   (b) $\mathrm{Mat}_{m,n}(K) \otimes_{\mathrm{Mat}_n(K)} \mathrm{Mat}_{n,p}(K)$.

2. Пусть M — абелева группа в аддитивной записи, т.е. $\mathbb{Z}$-модуль. Доказать, что $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq M/\operatorname{Tor}(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, где $\operatorname{Tor}(M)$ — *подгруппа кручения* (состоящая из всех элементов конечного порядка в M).

3. (*Коммутативность тензорного умножения*) Пусть A — коммутативное ассоциативное кольцо (или алгебра), M и N — модули над A (в силу коммутативности неважно, левые или правые). Построить естественный изоморфизм $M \otimes_A N \simeq N \otimes_A M$.

4. (*Ранг свободного модуля*) Конечно порождённый модуль M над коммутативным ассоциативным кольцом (алгеброй) A с единицей называется *свободным*, если он обладает *базисом*, т.е. таким набором элементов $e_1, \ldots, e_n$, что любой элемент $m \in M$ единственным образом представляется в виде $m = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$, где $a_1, \ldots, a_n \in A$. Доказать, что во всех базисах свободного модуля одинаковое количество элементов (называемое *рангом* модуля M).

5. (*Тензорное произведение гомоморфизмов*) Пусть $\varphi : M \to M'$ — гомоморфизм правых модулей, а $\psi : N \to N'$ — гомоморфизм левых модулей над кольцом (алгеброй) A. Доказать, что существует единственный гомоморфизм $\varphi \otimes \psi : M \otimes_A N \to M' \otimes_A N'$, удовлетворяющий свойству $(\varphi \otimes \psi)(m \otimes n) = \varphi(m) \otimes \psi(n)$, $\forall m \in M$, $n \in N$.

6. (*Точность справа функтора* $\otimes$) Пусть задана *короткая точная последовательность* гомоморфизмов правых A-модулей

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$$

   (точность означает, что ядро каждого гомоморфизма в последовательности совпадает с образом предыдущего гомоморфизма; в частности, φ инъективен, а ψ сюръективен), и N — левый A-модуль. Доказать:

   (a) последовательность

$$M' \otimes_A N \xrightarrow{\varphi \otimes \mathrm{id}_N} M \otimes_A N \xrightarrow{\psi \otimes \mathrm{id}_N} M'' \otimes_A N \longrightarrow 0$$

   точна;

   (b) последовательность

$$0 \longrightarrow M' \otimes_A N \xrightarrow{\varphi \otimes \mathrm{id}_N} M \otimes_A N$$

   не всегда точна (привести контрпример).

   (c) Сформулировать и доказать аналогичные утверждения для точных последовательностей гомоморфизмов левых A-модулей.