Домашнее задание №5

1. Пусть $A, B \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$ — две матрицы одинакового размера, и $C = A \odot B \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$ — их *произведение Адамара*, т.е. $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$. Доказать, что $\mathrm{rk}\, C \le \mathrm{rk}\, A \cdot \mathrm{rk}\, B$.

2. Пусть V, W — конечномерные векторные пространства над полем K. Доказать:

   (a) если $V' \subseteq V$, $W' \subseteq W$ — подпространства, то $V' \otimes W'$ канонически вкладывается в $V \otimes W$ в качестве подпространства (тензорные произведения берутся над K);

   (b) если $V'' \subseteq V$, $W'' \subseteq W$ — другой набор подпространств, то
   $$(V' \otimes W') \cap (V'' \otimes W'') = (V' \cap V'') \otimes (W' \cap W'');$$

   (c) любой элемент $u \in V \otimes W$ представим в виде $u = v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 + \cdots + v_r \otimes w_r$, где обе системы векторов $\{v_1, \ldots, v_r\}$ и $\{w_1, \ldots, w_r\}$ в пространствах V, W линейно независимы;

   (d) число r слагаемых вышеуказанного разложения данного элемента u не зависит от выбора разложения;

   (e) при $r = 1$ векторы v_1, w_1 определяются по u однозначно с точностью до пропорциональности.

3. Пусть $V_1 \ldots, V_s, W$ — конечномерные векторные пространства над полем K. Построить канонический изоморфизм между пространством полилинейных отображений $V_1 \times \cdots \times V_s \to W$ и пространством $V_1^* \otimes \cdots \otimes V_s^* \otimes W$.

4. Пусть V, W — векторные пространства размерностей n, m над полем K, и $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — линейные операторы на V и W, соответственно. Доказать:

   (a) $\mathrm{tr}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) = \mathrm{tr}(\mathcal{A}) \cdot \mathrm{tr}(\mathcal{B})$;

   (b) $\det(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) = \det(\mathcal{A})^m \cdot \det(\mathcal{B})^n$.

5. Доказать, что следующие алгебры изоморфны:

   (a) $\mathrm{Mat}_n(K) \otimes_K A \simeq \mathrm{Mat}_n(A)$ для любой ассоциативной алгебры A над полем K;

   (b) $\mathrm{Mat}_n(K) \otimes_K \mathrm{Mat}_m(K) \simeq \mathrm{Mat}_{nm}(K)$;

   (c) $K[x_1, \ldots, x_n] \otimes_K K[y_1, \ldots, y_m] \simeq K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$;

   (d) $\mathcal{F}(X, K) \otimes_K \mathcal{F}(Y, K) \simeq \mathcal{F}(X \times Y, K)$, если хотя бы одно из множеств X, Y конечно (здесь $\mathcal{F}(Z, K)$ — алгебра функций на множестве Z со значениями в поле K);

   (e) $A_n(K) \otimes_K A_m(K) \simeq A_{n+m}(K)$;

   (f) $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \simeq \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$;

   (g) $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \simeq \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$;

   (h) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \simeq \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

6. Доказать, что линейное отображение $\varphi : \mathrm{Mat}_n(K) \to \mathrm{Mat}_n(K) \otimes_K \mathrm{Mat}_n(K)$, задаваемое на базисе из матричных единиц формулой $\varphi(E_{ij}) = E_{ij} \otimes E_{ij}$, является гомоморфизмом алгебр.

7. Пусть A — конечномерная ассоциативная алгебра с единицей, $B, C \subset A$ — её подалгебры, коммутирующие друг с другом и порождающие A как алгебру, причём $\dim A = \dim B \cdot \dim C$. Доказать, что $A \simeq B \otimes C$.