Домашнее задание №6

1. Вычислить:

   (a) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/50\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}\big)$.

   (b) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}[x]}\big(\mathbb{Q}[x]/\mathbb{Q}[x](x^4-5x^2+6), \mathbb{Q}[x]/\mathbb{Q}[x](x^3-2x^2-3x+6)\big)$.

2. (*Сопряжённость функторов* Hom *и* $\otimes$)

   (a) Пусть M — (A,B)-бимодуль, N — (B,C)-бимодуль, и P — (D,C)-бимодуль. Построить изоморфизм (D,A)-бимодулей:
$$\mathrm{Hom}_B(M, \mathrm{Hom}_C(N,P)) \simeq \mathrm{Hom}_C(M \otimes_B N, P).$$

   (b) Пусть M — (A,B)-бимодуль, N — (C,A)-бимодуль, и P — (C,D)-бимодуль. Построить изоморфизм (B,D)-бимодулей:
$$\mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_C(N,P)) \simeq \mathrm{Hom}_C(N \otimes_A M, P).$$

3. Пусть A — ассоциативная алгебра с единицей, и $\mathcal{R} : A \to \mathrm{L}(V)$ — её линейное представление. Доказать, что существует разложение в прямую сумму инвариантных подпространств $V = V_0 \oplus V_1$, для которого $\mathcal{R}|_{V_0}$ — нулевое представление (т.е. все операторы $\mathcal{R}(a)$ нулевые), а $\mathcal{R}|_{V_1}$ — представление алгебры с единицей (т.е. $\mathcal{R}(1)|_{V_1}$ — единичный оператор).

4. Доказать, что радикал коммутативной ассоциативной алгебры совпадает с множеством её нильпотентных элементов.

5. Доказать, что радикал конечномерной ассоциативной алгебры A с единицей совпадает с пересечением

   (a) всех максимальных левых идеалов;

   (b) всех максимальных правых идеалов.

6. Пусть $K \subset L$ — конечное расширение полей. Доказать, что стандартное скалярное умножение на L (как алгебре над K) — либо невырожденное, либо нулевое.

7. Вычислить матрицу стандартного скалярного умножения алгебры $\mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$ в базисе $(1, i)$.

8. Пусть $A = K[x]/K[x]f$, где $f(x) = x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_n \in K[x]$. Доказать:

   (a) ранг стандартного скалярного умножения на A не больше числа различных корней многочлена f в его поле разложения;

   (b) при $\mathrm{char}\, K = 0$ в п. (a) имеет место равенство.

   (c) Всегда ли верно, что $\mathrm{Rad}(A)$ совпадает с ядром стандартного скалярного умножения?

9. Пусть в задаче 8 $K = \mathbb{R}$ и f сепарабелен. Доказать, что число вещественных корней многочлена f равно $p-q$, где p и q — положительный и отрицательный индексы инерции стандартного скалярного умножения на A. (*Указание*: разложить A в прямую сумму полей.)