

Домашнее задание №10

1. Пусть A — полупростая алгебра над полем K характеристики 0 , и $L \supset K$ — конечное расширение полей. Доказать, что алгебра $A \otimes_K L$ полупроста.
2. Пусть K — поле характеристики $p > 0$, $c \in K$ — элемент, не имеющий корня степени p в K , и $L = K[x]/K[x](x^p - c)$ — расширение поля K , получаемое присоединением корня степени p из c . Будет ли алгебра $L \otimes_K L$ полупростой?
3. Пусть V — конечномерный модуль над полупростой алгеброй $A = \text{Mat}_{n_1}(D_1) \oplus \dots \oplus \text{Mat}_{n_s}(D_s)$ (D_i — конечномерные алгебры с делением), причём представление алгебры A в пространстве V точно. Доказать:
 - (a) каждая изотипная компонента модуля V изоморфна пространству вида $\text{Mat}_{n_i \times m_i}(D_i)$, на котором подалгебра $\text{Mat}_{n_i}(D_i)$ действует умножениями слева, а остальные подалгебры $\text{Mat}_{n_j}(D_j)$ — нулевым образом;
 - (b) $B = \text{End}_A(V)^{\text{op}} \simeq \text{Mat}_{m_1}(D_1) \oplus \dots \oplus \text{Mat}_{m_s}(D_s)$ — полупростая алгебра;
 - (c) $\text{End}_B(V) = A$.
4. Доказать, что все автоморфизмы алгебры $\text{Mat}_n(K)$ — внутренние, т.е. имеют вид $\varphi(x) = gxg^{-1}$ для некоторой матрицы $g \in GL_n(K)$. (*Указание*: рассмотреть φ как линейное представление алгебры $\text{Mat}_n(K)$ в пространстве K^n .)
5. Доказать, что $\text{Mat}_n(A)^{\text{op}} \simeq \text{Mat}_n(A^{\text{op}})$.