Домашнее задание №8

1. Пусть D — конечномерная алгебра с делением, и $A = \mathrm{Mat}_n(D)$. Доказать, что алгебра A центральна тогда и только тогда, когда D центральна.

2. Пусть A, B — простые конечномерные ассоциативные алгебры (с ненулевым умножением), причём A центральна. Доказать, что алгебра $A \otimes B$ проста и $Z(A \otimes B) = 1 \otimes Z(B) \simeq Z(B)$. В частности, если A, B центральны, то и $A \otimes B$ центральна.

3. Пусть K — поле характеристики $\neq 2$, и $D(K, \alpha, \beta)$ — обобщённая алгебра кватернионов.
   (a) Доказать, что $D(K, \alpha, \beta)$ — центральная простая алгебра размерности 4 (а значит, либо алгебра с делением, либо изоморфна $\mathrm{Mat}_2(K)$).
   (b) Доказать, что $D(K, \alpha, 1) \simeq \mathrm{Mat}_2(K)$.
   (c) Как выглядят кватернионное сопряжение и кватернионная норма в $\mathrm{Mat}_2(K)$?

4. Изоморфны ли обобщённые алгебры кватернионов:
   (a) $D(\mathbb{Q}, -1, 2)$ и $D(\mathbb{Q}, -1, 3)$?
   (b) $D(\mathbb{Q}, -1, 3)$ и $D(\mathbb{Q}, -1, -3)$?
   (c) $D(\mathbb{Q}(\boldsymbol{i}), 2\boldsymbol{i}, 3)$ и $D(\mathbb{Q}(\boldsymbol{i}), 2, 3\boldsymbol{i})$?

5. Пусть D — центральная алгебра с делением над полем K, и $L \supset K$ — конечное расширение полей. Доказать:
   (a) минимальный многочлен любого элемента $\delta \in D$ над полем K совпадает с минимальным многочленом элемента $\delta \otimes 1 \in D \otimes_K L$ над полем L;
   (b) существует такое расширение $L \supset K$, что в алгебре $D \otimes_K L$ есть делители нуля;
   (c) существует такое расширение $L \supset K$, что $D \otimes_K L \simeq \mathrm{Mat}_n(L)$, причём $\dim_K D = n^2$.

   Поле L называется *полем расщепления*, а число $n = \deg D$ — *степенью* алгебры D.

6. Найти поле расщепления для обобщённой алгебры кватернионов $D(K, \alpha, \beta)$.

7. Пусть D — центральная алгебра с делением над полем K, и L — поле расщепления для D. Доказать, что $(L : K) \geqslant \deg D$. (*Указание*: рассмотреть L^n как векторное пространство над $D \subset D \otimes_K L \simeq \mathrm{Mat}_n(L)$ и вычислить его размерность над K.)

8. Пусть D — центральная алгебра с делением над полем K, и $L \subset D$ — подполе, содержащее K. Доказать:
   (a) $(L : K) \leqslant \deg D$ (*указание*: посмотреть на степень минимального многочлена примитивного элемента в расширении $L \supset K$);
   (b) $(L : K) = \deg D$ тогда и только тогда, когда L — поле расщепления для D (*указание*: рассмотреть D как (D, L)-бимодуль, т.е. векторное пространство над L с линейным представлением алгебры $D \otimes_K L$);
   (c) существует поле расщепления $L \subset D$.

9. Пусть D — центральная алгебра с делением степени 2 над полем K характеристики $\neq 2$. Доказать, что $D \simeq D(\alpha, \beta)$ для некоторых $\alpha, \beta \in K^\times$. (*Указание*: имитировать доказательство теоремы Фробениуса.)