Домашнее задание №9

1. Действие аддитивной группы $G = \mathbb{R}$ поля вещественных чисел на себе самой сдвигами по формуле $x \overset{t}{\longmapsto} x + t$ определяет её линейное представление $\mathcal{R}$ в пространстве функций $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

   (a) Доказать, что пространство многочленов $\mathbb{R}[x]$ инвариантно относительно $\mathcal{R}$.

   (b) Найти все инвариантные подпространства в $\mathbb{R}[x]$.

   (c) Записать матрицами в подходящем базисе операторы $\mathcal{R}(t)$ в ограничении на инвариантное подпространство $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ многочленов степени ≤ 2.

2. Для каждой невырожденной матрицы $g \in GL_n(K)$ определим линейный оператор $\mathcal{R}(g)$ в пространстве $\mathrm{Mat}_n(K)$ по формуле: $\mathcal{R}(g)X = g \cdot X \cdot g^{\top}$. Доказать:

   (a) $\mathcal{R}$ — линейное представление группы $GL_n(K)$ в пространстве $\mathrm{Mat}_n(K)$;

   (b) если $\mathrm{char}\, K \neq 2$, то представление $\mathcal{R}$ вполне приводимо.

   (c) В условиях п. (b) разложить $\mathcal{R}$ в прямую сумму неприводимых представлений.

3. Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем K. Доказать, что отображение $\mathcal{R} : GL(V) \to GL\big(\bigwedge^k(V)\big)$, определяемое формулой $\mathcal{R}(g)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = gv_1 \wedge \cdots \wedge gv_k$, есть неприводимое линейное представление.

4. Доказать, что все неприводимые комплексные представления конечной группы G одномерны тогда и только тогда, когда G абелева.

5. Двумерное линейное представление $\mathcal{R}$ группы $G = \langle g_1 \rangle_2 \times \langle g_2 \rangle_2$ задано формулами:

$$R(g_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R(g_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Разложить $\mathcal{R}$ в прямую сумму неприводимых представлений.

6. (*Контрпример к теореме Машке в положительной характеристике*) Доказать:

   (a) формула

$$R(k \bmod p) = \begin{pmatrix} 1 & k \cdot 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   задает двумерное линейное представление $\mathcal{R}$ аддитивной группы $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ над полем K характеристики $p > 0$;

   (b) линейное представление $\mathcal{R}$ приводимо, но не вполне приводимо.